

1. Från planets ekvation på parameterform

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + s(1, -2, 0) + t(0, 2, -1)$$

kan vi läsa ut en punkt som ligger i planet $P : (1, 1, -1)$ och två riktningsvektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 2, -1).$$

Planets normal är $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (2, 1, 2)$, alltså planets ekvation på affin form är $2x + y + 2z = D$. Punkten P ligger i planet, vilket ger $D = 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot (-1) = 1$. Linjen genom de två punkterna är parallell med vektor $(4, 0, 1) - (0, -4, 1) = (4, 4, 0)$, alltså $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ kan väljas som en riktningsvektor, och linjens ekvation blir

$$(x, y, z) = (4, 0, 1) + t(1, 1, 0) = (4 + t, t, 1).$$

För att hitta skärningspunkten sätter vi in linjens (x, y, z) i planets ekvation på affin form

$$2x + y + 2z = 2(4 + t) + t + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3t = -9 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3.$$

Sätt in detta t i linjens ekvation för att få skärningspunkten $(1, -3, 1)$.

Vinkeln α mellan $\mathbf{n} = (2, 1, 2)$ och $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ kan beräknas m.h.a. skalärprodukt

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{n}||\mathbf{u}|} = \frac{(2, 1, 2) \cdot (1, 1, 0)}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

2. För att beräkna egenvärden ställer vi upp den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 6 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Egenvärdena är $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$.

För att bestämma egenvektorer löser vi ekvationsystem $(\lambda I - A)x = 0$.

$\lambda = 0$:

$$\begin{cases} -3x + 6y = 0, \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer med $\lambda = 0$ är $t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$.

$\lambda = 1$:

$$\begin{cases} -2x + 6y = 0, \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer med $\lambda = 1$ är $t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, t \neq 0$.

Avbildningsmatris för sammansättningen $F \circ F$ är

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = A.$$

3. Omskriv A till trappform

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Vi har tre stycken (markerade) pivåelementer, alltså $\boxed{\text{rang } A = 3}$, och dimensionsatsen ger genast att $\boxed{\text{nolldim } A = 5 - 3 = 2}$.

För att bestämma en bas i nollrummet löser vi $Ax = 0$. Man kan läsa ut lösningen från samma trappformen ovan via återsubstitution

$$x_5 = 0, \quad x_4 = t, \quad x_3 = \frac{1}{2}(x_4 + x_5) = \frac{1}{2}t, \quad x_2 = s, \quad x_1 = 2x_2 + x_3 - x_4 = 2s - \frac{1}{2}t,$$

dvs

$$x = s(2, 1, 0, 0, 0) + \frac{t}{2}(-1, 0, 1, 2, 0).$$

En bas för nollrummet är $\boxed{(2, 1, 0, 0, 0) \text{ och } (-1, 0, 1, 2, 0)}$.

- T.ex. tre sista kolonnerna är linjärt oberoende (beräkna determinanten och kolla om den är nollskild).
- Att välja fyra linjärt oberoende kolonner är omöjligt eftersom fler än 3 vektorer i \mathbb{R}^3 är alltid beroende.

4. Enligt huvudsatsen är vektorerna linjärt beroende om och endast om

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 4 & -3 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 12 = (a - 2)(a - 6) = 0.$$

Vektorerna är linjärt beroende för $\boxed{a = 2 \text{ och } a = 6}$.

Den minsta är $a = 2$. För att beräkna värdemängden skriver vi $Ax = y$ och gör Gauss-elimineringar

$$\begin{cases} 2x + y & = y_1 \\ 2x + 4y - 3z & = y_2 \\ 2x - y + 2z & = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y & = y_1 \\ 3y - 3z & = y_2 - y_1 \\ -2y + 2z & = y_3 - y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y & = y_1 \\ 3y - 3z & = y_2 - y_1 \\ 0 & = 3(y_3 - y_1) + 2(y_2 - y_1). \end{cases}$$

Från den sista ekvationen framgår det att systemet har en lösning om och endast om högerledet y uppfyller sambandet

$$3(y_3 - y_1) + 2(y_2 - y_1) = -5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0.$$

Svar: värdemängden är planet med ekvationen $\boxed{-5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0}$.

5. En basvektor skall vara parallell med linjen, alltså en annan skall vara ortogonal mot linjen. Det finns inget krav på vektorers ordning i basen, så vi kan välja \hat{e}_1 parallell med normalen till linjen $\mathbf{n} = (3, 4)$

$$\hat{e}_1 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{5}(3, 4).$$

Den andra vektor skall vara parallell med linjen, t.ex. parallell med $\pm(4, -3)$. Av dessa två är det bara $(-4, 3)$ som är positivt orienterad med \hat{e}_1 (rotation från \hat{e}_1 till \hat{e}_2 med minsta vinkel sker *moturs*), således

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{5}(-4, 3).$$

Basbytematrisen blir då (OBS koordinater för de nya basvektorerna som kolonner)

$$S = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

och koordinatsambandet mellan gamla och nya koordinater är

$$x = S\hat{x} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x} = S^T x \quad (\text{ty } S \text{ är ortogonal matris}).$$

Den gamla x -axeln har riktningsvektor $(1, 0)$ som i den nya basen har koordinater

$$\hat{x} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Alltså, en ny ekvation för x -axeln (på parameterform) blir $\boxed{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = t(3, -4)}$.

6. Tre vektorekvationer $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ och $A\mathbf{w} = -\mathbf{w}$ ger en matrisekvation

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & -\mathbf{w} \end{bmatrix}}_Y \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad A = YX^{-1}.$$

Vi bestämmer inversen X^{-1} m.h.a. Gausseliminering $[X|I] \sim [I|X^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Detta ger

$$A = YX^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

För att diagonalisera A kan man notera att man är från början given tre linjärt oberoende egenvektorer \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} , alltså det återstår bara att lägga allt på plats i ordning

$$S = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektorer}}, \quad D = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvärdena}}, \quad S^{-1}AS = D.$$

7. a) Matris M är ortogonal $\Leftrightarrow M^T M = I$. Antag att A och B är ortogonala, dvs $A^T A = B^T B = I$. Vi skall testa AB

$$(AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{=I} B = B^T \cdot I \cdot B = B^T B = I. \quad \text{Ja!}$$

- b) Enligt produktregeln för determinanter

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA).$$

- c) Enligt definitionen för vektorprodukten är $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ ortogonal mot $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, men \mathbf{u} och \mathbf{v} är också ortogonala mot $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Eftersom tre vektorerna är ortogonala mot samma $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ligger dem i ett plan, alltså är linjärt beroende.

8. Planet, som kvadraten ligger i, går genom origo (ett hörn) och är parallellt med $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (1, 0, 1) - (0, 0, 0)$. Normalen kan beräknas som $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, 1, -2)$, dvs planets ekvation är $2x + y - 2z = 0$. Längden av \mathbf{v} är $\sqrt{2}$, dvs \mathbf{v} är en diagonal i kvadraten. Således, två övriga hörn hittar man om man tar steg $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ från mitten på \mathbf{v} i den riktning i planet som är ortogonal mot \mathbf{v} . En riktning i planet som är ortogonal mot \mathbf{v} kan man hitta som t.ex. $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = (-1, 4, 1)$, alltså två övriga hörn ligger i punkterna

$$\frac{1}{2}\mathbf{v} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{2}(1, 0, 1) \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{18}}(-1, 4, 1) = \frac{1}{2}(1, 0, 1) \pm \frac{1}{6}(-1, 4, 1).$$

Detta ger $\boxed{\frac{1}{3}(1, 2, 2) \text{ och } \frac{1}{3}(2, -2, 1)}$.

9. Sanna implikationer: c) \Rightarrow a) \Rightarrow b).

$\boxed{\text{c)} \Rightarrow \text{a)}$ För alla projektioner gäller att om x avbildas på y så ligger y på den aktuella linjen/planet, och projektionen av y blir igen y . I andra ord, för $y = Ax$ gäller

$$Ay = y \quad \Leftrightarrow \quad A(Ax) = Ax \quad \Leftrightarrow \quad A^2x = Ax$$

för alla x . Således, $A^2 = A$.

$\boxed{\text{c)} \not\Rightarrow \text{a)}$ Tag A som 3×3 nollmatris.

a) \Rightarrow b) Om λ är ett egenvärde till A och x är en egenvektor med egenvärdet λ , dvs $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, så gäller det

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2x.$$

Å andra sidan, $A^2x = Ax = \lambda x$, dvs

$$\lambda^2x = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - \lambda)x = 0, \quad x \neq 0.$$

Detta ger att $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$, dvs $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.

a) \nRightarrow b) Tag

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Eftersom rang av A kan inte överstiga antal kolonner n har vi

$$n \geq \text{rang } A \geq \frac{m+n}{2} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{m+n}{2} \quad \Rightarrow \quad 2n \geq m+n \quad \Rightarrow \quad n \geq m.$$

På samma sätt, rang av A kan inte överstiga antal rader m , dvs

$$m \geq \text{rang } A \geq \frac{m+n}{2} \quad \Rightarrow \quad m \geq n.$$

Detta betyder att $m = n$ (matrisen är kvadratisk) och rangen av A är n . Alltså alla kolonner är linjärt oberoende, och matrisen är inverterbar (huvudsatsen).