LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2019-03-18 kl 14-19

1. Från planets ekvation på parameterform

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + s(1, -2, 0) + t(0, 2, -1)$$

kan vi läsa ut en punkt som ligger i planet $P : (1, 1, -1)$ och två riktningsvektorer

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 2, -1).$$

Planets normal är $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (2, 1, 2)$, alltså planets ekvation på affin form är $2x + y + 2z = D$. Punkten P ligger i planet, vilket ger $D = 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot (-1) = 1$. Linjen genom de två punkterna är parallell med vektor $(4, 0, 1) - (0, -4, 1) = (4, 4, 0)$, alltså $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ kan väljas som en riktningsvektor, och linjens ekvation blir

$$(x, y, z) = (4, 0, 1) + t(1, 1, 0) = (4 + t, t, 1).$$

För att hitta skärningspunkten sätter vi in linjens (x, y, z) i planets ekvation på affin form

$$2x + y + 2z = 2(4 + t) + t + 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3t = -9 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3.$$

Sätt in detta t i linjens ekvation för att få skärningspunkten $\boxed{(1, -3, 1)}$.
Vinkeln α mellan $\mathbf{n} = (2, 1, 2)$ och $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ kan beräknas m.h.a. skalärprodukt

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{n}||\mathbf{u}|} = \frac{(2, 1, 2) \cdot (1, 1, 0)}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

2. För att beräkna egenvärden ställer vi upp den karakteristiska ekvationen

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 6 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Egenvärdena är $\boxed{\lambda = 0 \text{ och } \lambda = 1}$.
För att bestämma egenvektorer löser vi ekvationsystem $(\lambda I - A)x = 0$.
$\underline{\lambda = 0}$:

$$\begin{cases} -3x + 6y & = 0, \\ -x + 2y & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer med $\lambda = 0$ är $\boxed{t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \neq 0}$.

$\underline{\lambda = 1}$:

$$\begin{cases} -2x + 6y & = 0, \\ -x + 3y & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorer med $\lambda = 1$ är $\boxed{t\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\ t \neq 0}$.

Avbildningsmatris för sammansätningen $F \circ F$ är

$$A^2 = \begin{bmatrix}3 & -6\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -6\\1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\1 & -2\end{bmatrix} = A.$$

3. Omskriv A till trappform

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 0\\2 & -4 & 0 & 1 & -1\\3 & -6 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & -1 & -1\\0 & 0 & 4 & -2 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & \boxed{2} & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3}\end{bmatrix}$$

Vi har tre stycken (markerade) pivåelementer, alltså $\boxed{\operatorname{rang} A = 3}$, och dimensionssatsen ger genast att $\boxed{\operatorname{nolldim} A = 5 - 3 = 2}$.

För att bestämma en bas i nollrummet löser vi $Ax = 0$. Man kan läsa ut lösningen från samma trappformen ovan via återsubstitution

$$x_5 = 0, \quad x_4 = t, \quad x_3 = \frac{1}{2}(x_4 + x_5) = \frac{1}{2}t, \quad x_2 = s, \quad x_1 = 2x_2 + x_3 - x_4 = 2s - \frac{1}{2}t,$$

dvs

$$x = s(2,1,0,0,0) + \frac{t}{2}(-1,0,1,2,0).$$

En bas för nollrummet är $\boxed{(2,1,0,0,0) \text{ och } (-1,0,1,2,0)}$.

a) T.ex. tre sista kolonnerna är linjärt oberoende (beräkna determinanten och kolla om den är nollskild).

b) Att välja fyra linjärt oberoende kolonner är omöjligt eftersom fler än 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$ är alltid beroende.

4. Enligt huvudsatsen är vektorerna linjärt beroende om och endast om

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\a & 4 & -3\\2 & -1 & a\end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 8a + 12 = (a-2)(a-6) = 0.$$

Vektorerna är linjärt beroende för $\boxed{a = 2 \text{ och } a = 6}$.

Den minsta är $a = 2$. För att beräkna värdemängden skriver vi $Ax = y$ och gör Gauss-elimineringar

$$\begin{cases}2x + y &= y_1\\2x + 4y - 3z &= y_2\\2x - y + 2z &= y_3\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}2x + y &= y_1\\\quad 3y - 3z &= y_2 - y_1\\\quad -2y + 2z &= y_3 - y_1\end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}2x + y &= y_1\\\quad 3y - 3z &= y_2 - y_1\\\qquad 0 &= 3(y_3 - y_1) + 2(y_2 - y_1).\end{cases}$$

Från den sista ekvationen framgår det att systemet har en lösning om och endast om högerledet y uppfyller sambandet

$$3(y_3 - y_1) + 2(y_2 - y_1) = -5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0.$$

Svar: värdemängden är planet med ekvationen $\boxed{-5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0}$.

5. En basvektor skall vara parallell med linjen, alltså en annan skall vara ortogonal mot linjen. Det finns inget krav på vektorers ordning i basen, så vi kan välja $\hat{e}_1$ parallell med normalen till linjen $\mathbf{n} = (3, 4)$

$$\hat{e}_1 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{5}(3, 4).$$

Den andra vektor skall vara parallell med linjen, t.ex. parallell med $\pm(4, -3)$. Av dessa två är det bara $(-4, 3)$ som är positivt orienterad med $\hat{e}_1$ (rotation från $\hat{e}_1$ till $\hat{e}_2$ med minsta vinkel sker *moturs*), således

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{5}(-4, 3).$$

Basbytematrisen blir då (OBS koordinater för de nya basvektorerna som kolonner)

$$S = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

och koordinatsambandet mellan gamla och nya koordinater är

$$x = S\hat{x} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{x} = S^T x \text{ (ty } S \text{ är ortogonal matris).}$$

Den gamla x-axeln har riktningsvektor $(1, 0)$ som i den nya basen har koordinater

$$\hat{x} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Alltså, en ny ekvation för x-axeln (på parameterform) blir $\boxed{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = t(3, -4)}$.

6. Tre vektorekvationer $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ och $A\mathbf{w} = -\mathbf{w}$ ger en matrisekvation

$$A\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & -\mathbf{w} \end{bmatrix}}_{Y} \quad \Leftrightarrow \quad AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad A = YX^{-1}.$$

Vi bestämmer inversen X^{-1} m.h.a. Gausseliminering $[X|I] \sim [I|X^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Detta ger

$$A = YX^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

För att diagonalisera A kan man notera att man är från början given tre linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$, alltså det återstår bara att lägga allt på plats i ordning

$$S = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektorerna}}, \qquad D = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvärdena}}, \qquad S^{-1}AS = D.$$

7. a) Matris M är ortogonal $\Leftrightarrow$ $M^T M = I$. Antag att A och B är ortogonala, dvs $A^T A = B^T B = I$. Vi skall testa AB

$$(AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{=I} B = B^T \cdot I \cdot B = B^T B = I. \quad \text{Ja!}$$

b) Enligt produktregeln för determinanter

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA).$$

c) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella (linjärt beroende), så är alla tre också linjärt beroende. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är parallella, så enligt definitionen för vektorprodukten $\mathbf{u}\times\mathbf{v} \neq 0$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ är ortogonal mot $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Men $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är också ortogonala mot $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Eftersom tre vektorerna är ortogonala mot samma $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ligger dem i ett plan, alltså är linjärt beroende.

8. Planet, som kvadraten ligger i, går genom origo (ett hörn) och är parallellt med $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (1, 0, 1) - (0, 0, 0)$. Normalen kan beräknas som $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, 1, -2)$, dvs planets ekvation är $2x + y - 2z = 0$. Längden av $\mathbf{v}$ är $\sqrt{2}$, dvs $\mathbf{v}$ är en diagonal i kvadraten. Således, två övriga hörn hittar man om man tar steg $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ från mitten på $\mathbf{v}$ i den riktning i planet som är ortogonal mot $\mathbf{v}$.
En riktning i planet som är ortogonal mot $\mathbf{v}$ kan man hitta som t.ex. $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = (-1, 4, 1)$, alltså två övriga hörn ligger i punkterna

$$\frac{1}{2}\mathbf{v} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{2}(1, 0, 1) \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{18}}(-1, 4, 1) = \frac{1}{2}(1, 0, 1) \pm \frac{1}{6}(-1, 4, 1).$$

Detta ger $\boxed{\tfrac{1}{3}(1, 2, 2) \text{ och } \tfrac{1}{3}(2, -2, 1)}$.

9. Sanna implikationer: c) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b).
$\boxed{\text{c)} \Rightarrow \text{a)}}$ För alla projektioner gäller att om x avbildas på y så ligger y på den aktuella linjen/planet, och projektionen av y blir igen y. I andra ord, för $y = Ax$ gäller

$$Ay = y \quad \Leftrightarrow \quad A(Ax) = Ax \quad \Leftrightarrow \quad A^2 x = Ax$$

för alla x. Således, $A^2 = A$.

$\boxed{\text{c)} \not\Leftarrow \text{a)}}$ Tag A som 3×3 nollmatris.
$\boxed{\text{a)} \Rightarrow \text{b)}}$ Om λ är ett egenvärde till A och x är en egenvektor med egenvärdet λ, dvs $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, så gäller det

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x.$$

Å andra sidan, $A^2x = Ax = \lambda x$, dvs

$$\lambda^2 x = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - \lambda)x = 0, \quad x \neq 0.$$

Detta ger att $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$, dvs $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.
$\boxed{\text{a)} \not\Leftarrow \text{b)}}$ Tag

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Eftersom rang av A kan inte överstiga antal kolonner n har vi

$$n \geq \operatorname{rang} A \geq \frac{m+n}{2} \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{m+n}{2} \quad \Rightarrow \quad 2n \geq m+n \quad \Rightarrow \quad n \geq m.$$

På samma sätt, rang av A kan inte överstiga antal rader m, dvs

$$m \geq \operatorname{rang} A \geq \frac{m+n}{2} \quad \Rightarrow \quad m \geq n.$$

Detta betyder att $m = n$ (matrisen är kvadratisk) och rangen av A är n. Alltså alla kolonner är linjärt oberoende, och matrisen är inverterbar (huvudsatsen).