LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2017–06–02 kl 8–13

1. a) Eftersom

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & a & 4 \end{vmatrix} = -2a^2 - 2a + 4 = -2(a-1)(a+2),$$

följer det av huvudsatsen att systemet har entydig lösning då $a \neq 1$ och $a \neq -2$. Vi kontrollerar de återstående fallen:

$$\underline{a = 1:} \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 4x + y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3y = -3 \\ -3y = -6 \end{cases},$$

vilket ger att lösning saknas, samt

$$\underline{a = -2:} \quad \begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 4x - 2y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ 3z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

vilket ger de oändligt många lösningarna $(x,y,z) = (t, 1+2t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Det enda a-värde som ger oändligt många lösningar är alltså $a = -2$.

b) Vektorn $(2,1,2)$ ligger i värdemängden precis då ekvationssystemet

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

har (minst) en lösning X. Eftersom systemet är identiskt med det i a) är detta sant för alla $a \neq 1$.

2. a) Eftersom $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = (-1,1,2) \times (3,1,-2) = (-4,4,-4) = -4(1,-1,1)$, följer det att $(1,-1,1)$ en normalvektor till π. Planet har alltså ekvationen $x - y + z = 0$. (Konstanten blir 0 då origo ligger i π.)

b) Vi projicerar på normalvektorn $(1,-1,1)$: Antag att punkten (x_1,x_2,x_3) avbildas på punkten (y_1,y_2,y_3). Det följer då med hjälp av projektionsformeln att

$$\begin{aligned}(y_1,y_2,y_3) &= (x_1,x_2,x_3) - \frac{(x_1,x_2,x_3)\cdot(1,-1,1)}{|(1,-1,1)|^2}(1,-1,1) = \\ &= (x_1,x_2,x_3) - \frac{x_1 - x_2 + x_3}{3}(1,-1,1) = \\ &= \ldots = \tfrac{1}{3}(2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3),\end{aligned}$$

och avbildningsmatrisen ges således av

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Eftersom rangen anger dimensionen av värdemängden, som i vårt fall är planet π, följer det att rang $A = 2$. Dimensionssatsen ger sedan att nolldim A = antal kolonner i A - rang $A = 3-2 = 1$. (Alternativt kan man beräkna rangen genom att gausseliminera och räkna pivotelement.)

3. Här vill vi att $\hat{\mathbf{e}}_1$ skall vara parallell med vektorn $(1,1,-1)$, och för att ta fram $\hat{\mathbf{e}}_2$ söker vi en vektor som både är ortogonal mot $(1,1,-1)$ och $(2,1,0)$. En sådan ges av $(1,1,-1)\times(2,1,0) = (1,-2,-1)$. Normering ger nu

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \qquad \text{och} \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1),$$

och den tredje basvektorn fås genom $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-3,0,-3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$. (Svaret blir något annorlunda om man väljer andra riktningar för $\hat{\mathbf{e}}_1$ och $\hat{\mathbf{e}}_2$.)

Vi söker sedan ekvationer på parameterform för l_1 och l_2 med avseende på den nya basen: Eftersom l_1 är parallell med $\hat{\mathbf{e}}_1$ kan man utan räkningar se att en ekvation för denna linje är $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = t(1,0,0)$. I det andra fallet byter vi koordinater för riktningsvektorn $(2,1,0)$; då det rör sig om ett ortonormerat basbyte får vi

$$\hat{X} = S^T X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En ekvation för l_2 ges alltså av $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = t\big(\sqrt{3},0,-\sqrt{2}\big)$.

4. Vi börjar med att beräkna egenvärdena till A,

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda+1)(\lambda-5),$$

som alltså blir -1 och 5. Därefter tar vi fram motsvarande egenvektorer. Vi får

$$\underline{\lambda = -1:} \qquad \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases},$$

vilket ger oss egenvektorerna $t(1,-1)$ $(t \neq 0)$, och

$$\underline{\lambda = 5:} \qquad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \end{cases},$$

vilket ger oss egenvektorerna $t(1,2)$ $(t \neq 0)$. Då exempelvis $(1,-1)$, $(1,2)$ är en bas av egenvektorer kan vi välja de eftersökta matriserna som

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar sedan potensen av A:

$$A^{200} = (SDS^{-1})^{200} = SD\underbrace{S^{-1}S}_{=I}D\underbrace{S^{-1}S}_{=I}DS^{-1}\ldots SDS^{-1} = SD^{200}S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{200} & 0 \\ 0 & 5^{200} \end{pmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+5^{200} & -1+5^{200} \\ -2+2\cdot 5^{200} & 1+2\cdot 5^{200} \end{pmatrix}.$$

5. a) Arean A kan beräknas med hjälp av en vektorprodukt:

$$A = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \tfrac{1}{2}|(2,1,0) \times (0,1,1)| = \tfrac{1}{2}|(1,-2,2)| = \tfrac{3}{2}.$$

b) Vi normerar först $\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$, som är normalvektor till planet innehållande sidoytan PQR, och får $\mathbf{n}_1 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$. Höjden från S svarar mot längden av den ortogonala projektionen av vektorn $\overrightarrow{PS}$ på normalvektorn $\mathbf{n}_1$. Eftersom $\mathbf{n}_1$ är normerad får vi höjden direkt genom skalärprodukten

$$h = |\overrightarrow{PS} \cdot \mathbf{n}_1| = |(0,-2,2) \cdot \tfrac{1}{3}(1,-2,2)| = \tfrac{8}{3}.$$

c) *Konstruktörens anm.*: Tillägget av deluppgift b) gjorde att lösningen i c) oavsiktligt blev något kortare (och lättare) än tänkt. Med höjden $h = 8/3$ i b) kan man direkt ta fram vinkeln med vanlig trigonometri: Vi beräknar då längden $|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{8}$, vilket ger oss $\sin\theta = h/|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{8}/3$ och således $\theta = \arcsin(\sqrt{8}/3)$.

En alternativ lösning är att först beräkna vinkeln θ_1 mellan $\overrightarrow{PS}$ och $\mathbf{n}$ genom

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{PS} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{PS}||\mathbf{n}|}\right) = \arccos\left(\frac{(0,-2,2)\cdot(1,-2,2)}{\sqrt{8}\cdot 3}\right) = \arccos\tfrac{\sqrt{8}}{3},$$

vilket sedan ger att $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{8}}{3}$.

6. a) Med beteckningen F för avbildningen gäller det att $F(\mathbf{e}_1) = (1,0,2)$ och $F(\mathbf{e}_3) = (2,1,-1)$. Eftersom $\mathbf{e}_2 = (1,1,1) - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ följer det av linjäriteten att

$$F(\mathbf{e}_2) = F((1,1,1)) - F(\mathbf{e}_1) - F(\mathbf{e}_3) = (0,1,4) - (1,0,2) - (2,1,-1) = (-3,0,3).$$

Insättning av $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$ och $F(\mathbf{e}_3)$ som kolonner i A ger oss slutligen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Låt G vara den linjära avbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som har B som avbildningsmatris. Det följer då att den inversa avbildningen G^{-1} har avbildningsmatris B^{-1}. Från de två första kolonnerna i B ser vi att $G(\mathbf{e}_1) = (1,2,-4)$ och $G(\mathbf{e}_2) = (0,-1,2)$, och det följer således att $G^{-1}((1,2,-4)) = \mathbf{e}_1$ och $G^{-1}((0,-1,2)) = \mathbf{e}_2$. Eftersom $\mathbf{e}_1 = (1,2,-4) + 2(0,-1,2)$ följer det av linjäriteten att

$$G^{-1}(\mathbf{e}_1) = G^{-1}((1,2,-4)) + 2G^{-1}((0,-1,2)) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = (1,2,0),$$

och då $G^{-1}(\mathbf{e}_1)$ svarar mot den första kolonnen i B^{-1} inser vi att denna kolonn måste vara just $(1 \quad 2 \quad 0)^T$.

c) Att det säkert går att bestämma den första kolonnen i B^{-1} i b) hänger precis på att basvektorn $\mathbf{e}_1$ är en linjärkombination av de två kända kolonnvektorerna i B. Allmänt, för att säkert kunna bestämma kolonn nr. k i B^{-1} krävs det att basvektorn $\mathbf{e}_k$ är en linjärkombination av de två kända kolonnvektorerna i B.