LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2017-03-13

1. Vi börjar med att undersöka när determinanten för koefficientmatrisen A är noll:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & 3 & a \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2a^2 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2.$$

För $a \neq \pm 2$ har systemet entydig lösning, och vi undersöker fallen $a \pm 2$. För $a = 2$ fås:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + \ \ y + 2z = -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + \ \ y + 2z = 0 \\ \qquad 2y \qquad\ = 4 \\ \qquad\qquad\ \ 0 = -4 \end{cases},$$

och vi ser att lösning saknas. För $a = -2$ fås:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ -2x + \ \ y + 2z = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + \ \ y - 2z = 0 \\ \qquad 2y \qquad\ = 4 \\ \qquad 2y \qquad\ = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}.$$

Svar: För $a \neq \pm 2$ har vi en lösning, för $a = 2$ ingen lösning, och slutligen oändligt många lösningar $(x, y, z) = (t - 1, 2, t),\ t \in \mathbb{R}$, för $a = -2$.

2. **a)** En vektor ortogonal mot båda ges av vektorprodukten

$$(1, 1, 2) \times (-3, 4, 1) = (-7, -7, 7) = -7(1, 1, -1),$$

så vi kan välja $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$. Med denna riktningsvektor, och punkt P_0, får linjen l ekvation $(x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, 1, -1),\ t \in \mathbb{R}$.

b) Vi beräknar vektorn $\overrightarrow{P_0P} = (2, 2, 1)$. Ortogonala projektionen $\mathbf{u}$ av $\overrightarrow{P_0P}$ på $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = (1, 1, -1).$$

Punkten Q fås nu från sambandet

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} = (0, 1, 2) + (1, 1, -1) = (1, 2, 1)$$

(rita figur!), så Q får koordinaterna $(1, 2, 1)$.

c) Vi väljer punkten $P_0 = (0, 0, -1)$ i planet, och projicerar $\overrightarrow{P_0P} = (2, 3, 4)$ på planets normal $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$:

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = (2, 4, 2).$$

Punkten Q fås nu från sambandet

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \mathbf{u} = (2, 3, 3) - (2, 4, 2) = (0, -1, 1)$$

(rita figur!), så Q får koordinaterna $(0, -1, 1)$.

Svar: a) $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$, $l : (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, 1, -1),\ t \in \mathbb{R}$. b) $Q : (1, 2, 1)$. c) $Q : (0, -1, 1)$.

3. **a)** Vid spegling i y-axeln avbildas basvektorerna enligt

$$(1,0) \mapsto (-1,0), \quad (0,1) \mapsto (0,1),$$

och eftersom kolonnerna i avbildningsmatrisen är bilderna av basvektorerna får vi för speglingen matrisen

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

För vridningen gäller det att

$$(1,0) \mapsto (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}), \quad (0,1) \mapsto (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2})$$

(rita figur!), så detta ger matrisen

$$V = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för den sammansatta avbildningen blir slutligen

$$A = VS = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Det finns många olika sätt att lösa denna uppgift. Exempelvis kan vi gå direkt på definitionen och skapa en matris med precis två linjärt oberoende kolonner, genom att välja två som inte är parallella och sedan göra den tredje beroende av dessa. Alternativt kan vi använda att trappekvivalenten skall ha två pivåelement: En matris som fungerar, och som från början är på trappform, är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet får vi nu genom att lösa matrisekvationen $AX = \mathit{0}$, vilket i vårt fall ger $X = t(0,0,1)$. En bas för nollrummet är alltså $(0,0,1)$.

Svar: a) A $= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. b) Se ovan.

4. **Svar:** a) Falskt. b) Sant. c) Sant. d) Falskt. e) Sant.

5. **a)** Egenvärdena är lösningarna till ekvationen $\det(\lambda I - A) = 0$:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0,\ \lambda = -1\ .$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = 0$ och $\lambda = -1$. Motsvarande egenvektorer fås som icke triviala lösningar till ekvationsystemet $(\lambda I - A)X = \mathit{0}$. För $\lambda = 0$ blir systemet

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases},$$

så egenvektorerna blir $X = t(1, 0, 1),\ t \neq 0$, till egenvärdet $\lambda = 0$.

För $\lambda = -1$ blir systemet

$$\left\{ \begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \right) ,$$

och vi ser att egenvärdena blir alla nollskilda vektorer i planet $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

b) Till matrisen S skall vi välja tre linjärt oberoende egenvektorer som kolonner. Eftersom $(1, 0, 1)$ inte är parallell med planet $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ kan vi välja $(1, 0, 1)$ tillsammans med två icke-parallella vektorer i planet, t.ex. $(1, -1, 0)$ och $(1, 0, 2)$. Vi får då

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Med egenvärdena på motsvarande positioner i diagonalmatrisen D ger detta

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) I en ortogonal matris är speciellt kolonnerna ortogonala mot varandra, så frågan är här (utan att gå in på en fullständig teoretisk motivering) om vi kan välja tre egenvektorer som är ortogonala mot varandra. Men eftersom $(1, 0, 1)$ inte är ortogonal mot planet $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ går detta inte.

Svar: a) Egenvektorer $X = t(1, 0, 1),\ t \neq 0$, till egenvärdet $\lambda = 0$, samt alla nollskilda vektorer i planet $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ till egenvärdet $\lambda = -1$.

b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. c) Nej.

6. **a)** Se boken sidan 99.

b) Se Definition 3 på sidan 100 i boken. För ekvivalent villkor se exempelvis Sats 2 (i) på samma sida.

c) Vi skall exempelvis visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathit{0} \tag{1}$$

bara har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Tillämpar vi avbildningen på denna ekvation får vi, med hjälp av linjäriteten och de villkor vi har givna att

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 &= \mathit{0} && \Leftrightarrow \\ F(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3) &= F(\mathit{0}) && \Leftrightarrow \\ \lambda_1 F(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 F(\mathbf{u}_2) + \lambda_3 F(\mathbf{u}_3) &= \mathit{0} && \Leftrightarrow \\ \lambda_1 \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_3 + \lambda_3 \mathit{0} &= \mathit{0} && \Leftrightarrow \\ \lambda_1 \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_3 &= \mathit{0}. \end{aligned}$$

Fortsätter vi att tillämpa F på denna sista ekvation får vi på samma sätt att

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_3 &= \mathit{0} && \Leftrightarrow \\
F(\lambda_1 \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_3) &= F(\mathit{0}) && \Leftrightarrow \\
\lambda_1 F(\mathbf{u}_2) + \lambda_2 F(\mathbf{u}_3) &= \mathit{0} && \Leftrightarrow \\
\lambda_1 \mathbf{u}_3 + \lambda_2 \mathit{0} &= \mathit{0} && \Leftrightarrow \\
\lambda_1 \mathbf{u}_3 &= \mathit{0}.
\end{aligned}$$

Här ser vi nu att vi måste ha $\lambda_1 = 0$, och då ger ekvationen $\lambda_1 \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_3 = \mathit{0}$ ovan att $\lambda_2 = 0$. Slutligen ger ekvation (1) att $\lambda_3 = 0$, och vi är klara.

Svar: Se ovan.