LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2016-10-24

1. a) Riktningsvektorn för linjen är $\mathbf{v} = (1, -1)$. Ortogonalprojektion av (x, y) på linjen fås av: $\mathbf{u} = \frac{(x,y)\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$. Speglingen blir $2\mathbf{u} - (x, y)$. Alltså är

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Matrisen A för den linjära avbildningen har bilderna av basvektorerna som kolonner. Alltså blir det:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Vid skärning mellan linjerna gäller

$$\begin{cases} 1 + t = -4 + 3s \\ 1 + 2t = 5 - s \\ 1 + 3t = 2 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 2 \end{cases}$$

Skärningspunkten mellan linjerna är alltså $(2, 3, 4)$.
Vektorerna $\boldsymbol{u} = (2, 3, 4) - (1, 2, 8) = (1, 1, -4)$ och $\boldsymbol{v} = (5, 1, 2) - (1, 2, 8) = (4, -1, -6)$ spänner då upp ett parallellogram, vars area är dubbelt så stor som triangelns area. Eftersom $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (-10, -10, -5)$ är triangelns area $\frac{1}{2}|\boldsymbol{w}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = \frac{15}{2}$

Svar: Triangelns area är $\frac{15}{2}$ a.e.

3. Vi börjar med att lösa problemet algebraiskt.

$$A(X + B)^{-1} = B \iff X = B^{-1}A - B.$$

Inversen till B fås genom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Därmed har vi att

$$
\begin{aligned}
X &= B^{-1}A - B \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. a) Se boken.

b) Sant: ii,iv. Falskt: i,iii,v.

5. Matrisens karakteristiska polynom är $(\lambda - 2)^2 - 1 = 0$. Det har rötterna $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$, som är matrisens egenvärden. Egenvektorerna till $\lambda = 1$ löser ekvationen

$$x + y = 0,$$

alltså $(x, y) = t(1, -1)$. Egenvektorerna till $\lambda = 3$ löser

$$x - y = 0,$$

alltså $(x, y) = t(1, 1)$. Vi har

$$S^{-1}AS = D$$

där D är diagonalmatrisen

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och S är en matis vars kolonner är egenvektorer till 3 och 1 (i denna ordning). Om vi väljer

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

så är S en ortogonalmatris och $S^{-1} = S^T$. Vi har $A = SDS^{-1}$ och $A^{100} = SD^{100}S^{-1}$ vilket blir matrisen

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{100} + 1 & 3^{100} - 1 \\ 3^{100} - 1 & 3^{100} + 1 \end{pmatrix} .$$

6. Den givna informationen kan uttryckas som

$$
\begin{cases}
2\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2 + \hat{\boldsymbol{e}}_3 = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\
\hat{\boldsymbol{e}}_1 - 2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \\
2\hat{\boldsymbol{e}}_1 + 2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3
\end{cases}
$$

Successiv elimination ger att

$$
\begin{cases}
\hat{\boldsymbol{e}}_1 = 8\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3 \\
\hat{\boldsymbol{e}}_2 = -2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3 \\
\hat{\boldsymbol{e}}_3 = -11\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + 11\boldsymbol{e}_3
\end{cases}
$$

Svar: Basvektorerna $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$ får i basen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ koordinaterna $(8, -2, -6), (-2, 0, 2)$ respektive $(-11, 5, 11)$.