LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR TILL
LINJÄR ALGEBRA
2016-08-25 kl 14–19

1. a) Vi får

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}\cdot\bar{\mathbf{v}} &= 1\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 0 = 3,\\ |\bar{\mathbf{u}}| &= \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6},\\ |\bar{\mathbf{v}}| &= \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vinkeln mellan $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ får vi nu genom

$$\cos([\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}}]) = \frac{\bar{\mathbf{u}}\cdot\bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{v}}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

vilket ger vinkeln $[\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}}] = \frac{\pi}{6}$.

b) Parallellepipedens volym fås som absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -3.$$

Volymen av parallellepipeden blir alltså 3. Eftersom volymen inte är noll ligger dom tre vektorerna inte i samma plan och därmed är dom linjärt oberoende.

c) Enligt volymssatsen får vi den nya volymen med tecken genom att multiplicera den gamla med determinaten för avbildningen. Ellipsoidens volym blir alltså $5\cdot|-3| = 15$.

2. Två riktningsvektorer till π ges av

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}_1 &= \overline{OQ_2} - \overline{OQ_1} = (4, -4, 4)\\ \bar{\mathbf{v}}_2 &= \overline{OQ_3} - \overline{OQ_1} = (1, -3, 5).\end{aligned}$$

En normal till π hittar vi med hjälp av kryssprodukten

$$\bar{\mathbf{v}}_1 \times \bar{\mathbf{v}}_2 = (-8, -16, -8) = -8(1, 2, 1).$$

Planet π får alltså normalen $\bar{\mathbf{n}} = (1, 2, 1)$ och ekvationen $x + 2y + z + d = 0$.
Insättning av exampelvis punkten Q_2 ger nu $d = 0$.
Eftersom origo ligger i planet blir $\overline{OP} = (1, 2, 3)$ en vektor som går från planet till punkten. Projektionen P' på planet ges av

$$\overline{OP'} = \overline{OP'} - \frac{\overline{OP'} \cdot \bar{\mathbf{n}}}{|\bar{\mathbf{n}}|^2}\bar{\mathbf{n}} = (1, 2, 3) - \frac{(1, 2, 3) \cdot (1, 2, 1)}{1^2 + 2^2 + 1^2}(1, 2, 1) = \frac{1}{3}(-1, -2, 5).$$

Avståndet mellan P och π blir

$$|\overline{OP} - \overline{OP'}| = \left|\frac{4}{3}(1, 2, 1)\right| = \frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

3. a) För att $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ ska vara en ON-bas krävs att vektorerna är parvis ortogonala och har längden 1. Vi får

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0) = 0,\\
\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{18}}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)) = 0,\\
\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{12}}(1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)) = 0
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
|\hat{\mathbf{e}}_1| &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1,\\
|\hat{\mathbf{e}}_2| &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0} = 1,\\
|\hat{\mathbf{e}}_3| &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = 1.
\end{aligned}$$

b) Eftersom basbytet är ortogonalt blir basbytesmatrisen

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

ortogonal och därför är $S^T = S^{-1}$. Koordinatsambanden blir alltså $X = S\hat{X}$ och $\hat{X} = S^T X$. Vi får

$$S\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } S^T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorn $\bar{\mathbf{u}}$ har alltså koordinaterna $(2, 0, 1)$ i basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ och vektorn $\bar{\mathbf{v}}$ har koordinaterna $(\sqrt{3}, 0, 0)$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.

4. Avbildningsmatrisen A till avbildningen F uppfyller

$$A\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=C} \Leftrightarrow A = CB^{-1}.$$

Eftersom $(CB^{-1})^{-1} = BC^{-1}$ får den inversa avbildningen F^{-1} avbildningsmatrisen

$$A^{-1} = BC^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom F är inverterbar (och därför bijektiv) ges vektorn som avbildas av F på $(4, 2, 0)$ av $F^{-1}(4, 2, 0)$. Vi får

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

5. a) Beräkning av determinanten ger

$$\det A = -2a^2 + 6a - 4 = -2(a-1)(a-2).$$

Ekvationen $\det A = 0$ får därför lösningarna $a = 1$ och $a = 2$.

b) För $a = 1$ får vi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ - x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases},$$

vilket ger nollrummet $(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 1, 0)$. Nolldimensionen blir alltså 1 och en bas för nollrummet är $(-2, 1, 0)$.
För $a = 2$ får vi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

vilket ger nollrummet $(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 1)$. Nolldimensionen blir alltså 1 och en bas för nollrummet är $(1, -1, 1)$.

c) För att systemet ska kunna ha fler än en lösning måste $\det A = 0$ enl. huvudsatsen. Alltså är $a = 1$ eller $a = 2$. Skillnaden mellan dom två lösningarna

$$(2, 1, p) - (-2, 3, q) = (4, -2, p - q)$$

måste dessutom ligga i nollrummet till A. Vi ser att $(4, -2, p - q)$ är inte parallell med $(1, -1, 1)$ för något värde på $p - q$ och därför är $a \neq 2$. För $a = 1$ får vi

$$t(-2, 1, 0) = (4, -2, p - q)$$

om $t = -2$ och $p - q = 0$.

6. a) Vi beräknar först egenvärden till A.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{9}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{2}{10} & \lambda - \frac{6}{10} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2},$$

vilken har rötterna $\lambda = \frac{1}{2}$ och 1. I fallet $\lambda = \frac{1}{2}$ ser vi att egenvektorerna uppfyller

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 2t \end{cases} \quad (t \neq 0).$$

På samma sätt får vi när $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \end{cases} \quad (t \neq 0).$$

Om matriserna D och S exempelvis väljs som

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Eftersom S är både ortogonal och symmetrisk blir $S^{-1} = S^T = S$ vilket ger $A = SDS^{-1} = SDS$. Vi får nu

$$A^n = SD^nS = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

som går mot

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = B,$$

då $n \to \infty$. Eftersom vänsterledet ovan är en diagonalisering ser vi att B har egenvärdet 0 med tillhörande egenvektorer $t(-1, 2)$, $t \neq 0$ och egenvärdet 1 med tillhörande egenvektorer $t(2, 1)$, $t \neq 0$.

c) Dom två egenvektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ utgör en ortonormerad bas. Varje vektor $\bar{\mathbf{v}}$ kan därför delas upp i två komposanter $\bar{\mathbf{v}}_1$ och $\bar{\mathbf{v}}_2$ parallella med $\hat{\mathbf{e}}_1$ respektive $\hat{\mathbf{e}}_2$. Eftersom $A(\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2$ kommer avbildingen halvera $\bar{\mathbf{v}}$'s längd i riktingen $\hat{\mathbf{e}}_1$.
För B har vi på samma sätt att $B(\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2) = \bar{\mathbf{v}}_2$ vilket betyder ortogonal projektion på vektorn $\hat{\mathbf{e}}_2$. Applicerar vi A många gånger (enligt $A^n(\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2) = \frac{1}{2^n}\bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_2$) kommer vi att hamna nära projektionen av $\bar{\mathbf{v}}$ på $\hat{\mathbf{e}}_2$.