LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
LINJÄR ALGEBRA
2016–06–03 kl 14–19

1. Eftersom

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & a \\ a-2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2a(a-2)-12-(-8)-(-2a) = 2(a-2)(a+1),$$

så följer det av huvudsatsen att systemet har entydig lösning då $a \neq 2$ och $a \neq -1$. Vi kontrollerar de återstående fallen:

$$\underline{a=2:} \quad \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 2z = -4 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

vilket ger de oändligt många lösningarna $(x,y,z) = (-t-2, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, samt

$$\underline{a=-1:} \quad \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - z = -4 \\ -3x + 2y - 2z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 4y - 7z = 0 \\ 0 = -9 \end{cases},$$

vilket ger att lösning saknas.

2. a) En riktningsvektor till l ges av $\overrightarrow{P_1P_2} = (2,-1,1)$, så en ekvation för l på parameterform ges av

$$l: \quad (x,y,z) = (1,-2,3) + t(2,-1,1) = (1+2t, -2-t, 3+t).$$

Vektorerna $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (2,2,-2) = 2(1,1,-1)$ och $\overrightarrow{Q_1Q_3} = (0,1,-2)$ är två (ickeparallella) riktningsvektorer till π, så en normalvektor är $(1,1,-1)\times(0,1,-2) = (-1,2,1)$. En ekvation för planet på affin form ges således av $-x+2y+z+D=0$, där insättning av koordinaterna för t.ex. Q_1 i ekvationen ger oss att $D = 11$. Sammanfattningsvis har vi alltså

$$\pi: \quad -x+2y+z+11 = 0.$$

För att bestämma skärningen tar vi nu parameterframställningen av l och sätter in i ekvationen för π:

$$-(1+2t)+2(-2-t)+3+t+11 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 3,$$

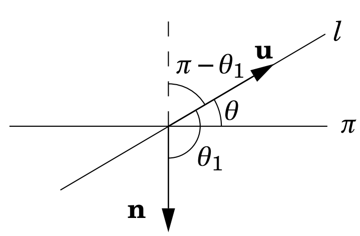
vilket ger oss skärningspunkten $(1+2\cdot 3, -2-3, 3+3) = (7,-5,6)$.

b) För att bestämma skärningsvinkeln börjar vi med att bestämma vinkeln θ_1 mellan riktningsvektorn $\mathbf{u} = (2,-1,1)$ för l och normalvektorn $\mathbf{n} = (-1,2,1)$ för π:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = (2,-1,1)\cdot(-1,2,1) = 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 = -3,$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = |\mathbf{u}||\mathbf{n}|\cos\theta_1 = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}\cos\theta_1 = 6\cos\theta_1,$$

vilket ger oss att $\cos\theta_1 = -1/2$, och således att $\theta_1 = 2\pi/3$. Från figuren (sett i genomskärning) kan vi nu avläsa att skärningsvinkeln blir $\theta = \frac{\pi}{2} - (\pi - \theta_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.



3. a) Se läroboken sidan 130–131.

b) En kvadratisk matris A är ortogonal precis då kolonnvektorerna utgör en ON-bas. En snabb kontroll visar att de två första kolonnvektorerna är ortogonala, och för att de ska ha längd 1 måste det gälla att $\lambda = \pm 1/3$; låt oss välja $\lambda = 1/3$. Det följer vidare att vektorn

$$\tfrac{1}{3}(1,2,-2) \times \tfrac{1}{3}(2,1,2) = \tfrac{1}{9}(6,-6,-3) = \tfrac{1}{3}(2,-2,-1)$$

är ortogonal mot de två första kolonnerna (och har längd 1), så om vi väljer $a = 2$, $b = -2$ och $c = -1$ blir matrisen A ortogonal. Sammanfattningsvis har vi (exempelvis) att

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Förutsatt att alla ingående matriser är inverterbara gäller det att

$$A^{-1}X^{-1} = B^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad A^{-1} = B^{-1}X \quad\Leftrightarrow\quad X = BA^{-1}.$$

Notera att matrisen A är inverterbar (den är ortogonal) och då $\det(B) = -1 \neq 0$ följer det av huvudsatsen att B är inverterbar. Då är slutligen även $X = BA^{-1}$ inverterbar (en produkt av två inverterbara matriser).

Eftersom A är ortogonal gäller det att $A^{-1} = A^T$, och vi får

$$X = BA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) Antag att spegelbilden av punkten (x_1, x_2) ges av (y_1, y_2). En normalvektor till l är $(1,2)$, och med hjälp av projektionsformeln får vi nu

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2) - 2 \cdot \frac{(x_1, x_2)\cdot(1,2)}{1^2 + 2^2}(1,2) =$$

$$= (x_1, x_2) - \frac{2x_1 + 4x_2}{5}(1,2) = \tfrac{1}{5}(3x_1 - 4x_2, -4x_1 - 3x_2).$$

Avbildningsmatrisen blir således $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

b) En normalvektor till l ges av $(1,2)$, så normering ger (t.ex.) $\widehat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. En ekvation för l på parameterform är $(x, y) = (-2,1)t$, så utgående från riktingsvektorn $(-2,1)$ väljer vi (t.ex.) $\widehat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$.

Basbytet beskrivs av koordinatsambanden

$$X = S\widehat{X} \quad\Leftrightarrow\quad \widehat{X} = S^{-1}X = S^T X,$$

där S är den ortogonala basbytesmatrisen $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Vi får således

$$\begin{pmatrix}\widehat{x}_1\\ \widehat{x}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-11\\ -2\end{pmatrix},$$

dvs. det gäller att $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-11,-2)$ med avseende på basen $\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2$. (Alternativt, eftersom det är ett ortonormerat basbyte, beräknar vi koordinaterna direkt via skalärprodukterna $\widehat{x}_1 = \mathbf{u}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_1$ respektive $\widehat{x}_2 = \mathbf{u}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_2$.)

c) Utifrån konstruktionen av den nya basen, då vi vet att F är en spegling i l, gäller det att $F(\widehat{\mathbf{e}}_1) = \widehat{\mathbf{e}}_1$ respektive $F(\widehat{\mathbf{e}}_2) = -\widehat{\mathbf{e}}_2$. Insättning av dessa bildvektorer som kolonner ger oss direkt den nya avbildningsmatrisen

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(Alternativt kan matrisen beräknas via formeln $\widehat{A} = S^{-1}AS = S^TAS$.)

5. Låt A vara avbildningsmatrisen för F. Då gäller det att

$$A\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

och det följer att

$$A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Rangen av en matris ges av det maximala antalet linjärt oberoende kolonnvektorer, och med de två sista kolonnerna lika, och de två första icke-parallella, följer det att $\text{rang}(A) = 2$.

Eftersom värdemängden spänns upp av kolonnvektorerna, följer det att $(-1,1,-3)$ ligger i V_F precis då det existerar tal x och y sådana att $x(3,5,1)+y(1,1,1) = (-1,1,-3)$:

$$x(3,5,1) + y(1,1,1) = (-1,1,-3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+y = -1\\ 5x+y = 1\\ x+y = -3\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1\\ y = -4\end{cases}.$$

Således gäller det att $(-1,1,-3) \in V_F$.

6. a) Vi börjar med att beräkna egenvärdena till A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-1)^2 - 4 - 4 - 4(\lambda-1) - (\lambda-4) - 4(\lambda-1) = \ldots = \lambda^2(\lambda-6),$$

vilket ger oss egenvärdena $\lambda = 0$ respektive $\lambda = 6$. Därefter tar vi fram motsvarande egenvektorer:

$$\underline{\lambda = 0:} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

vilket ger oss att samtliga nollskilda vektorer (x_1, x_2, x_3) i planet $\pi : -2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ är egenvektorer med egenvärde 0.

$$\underline{\lambda = 6:} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

vilket ger oss egenvektorerna $(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 1, 1)$, $t \neq 0$, med egenvärde 6. Vi noterar speciellt att dessa egenvektorer är ortogonala mot dem i planet π.

För en ON-bas av egenvektorer börjar vi med att välja $\widehat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$, och genom att normera en godtycklig vektor i π (som automatiskt är ortogonal mot $\widehat{\mathbf{e}}_1$), t.ex. $(1, 2, 0)$, får vi $\widehat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$. Den tredje basvektorn väljs sedan som $\widehat{\mathbf{e}}_3 = \widehat{\mathbf{e}}_1 \times \widehat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 1, -5)$. Med detta basbyte får vi

$$S = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}, \qquad \text{respektive} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Låt X vara en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^3$, och låt $X = X' + X''$ beteckna komposantuppdelningen där X' ligger i π och X'' är ortogonal mot π. Då får vi

$$F(X) = AX = A(X' + X'') = AX' + AX'' = 0 \cdot X' + 6 \cdot X'' = 6X''.$$

En geometrisk tolkning av avbildningen är således ortogonal projektion på linjen $t(-2, 1, 1)$ åtföljd av en förlängning faktorn 6.