LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
LINJÄR ALGEBRA
2016-01-11

1. Då $a = 1$ eller $a = 2$ finns oändligt många lösningar. Då $a \neq 1$ och $a \neq 2$ finns en lösning.

2. **a)** Arean är $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.
   b) En ekvation är $x - 2y + z = 0$.
   c) Volymen är 3.
   d) Punkten $(3, 3, 3)$.

3. Koordinaterna med avseende på basen $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ för den vektor som i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ har koordinaterna $(1, 2)$ är $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Koordinaterna med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ för den vektor som i basen $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ har koordinaterna $(1, 2)$ är $(4, 1)$.

4. **a)** Sant.
   b) Falskt.
   c) Sant.
   d) Falskt.
   e) Sant.

5. Avbildningsmatriserna för projektionen och vridningen blir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för den sammansatta avbildningen F blir således

$$A = VP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Här gäller det att $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{nolldim} A = 1$, och bas för nollrummet är vektorn $(0, 1, 0)$. Värdemängden till F blir planet $x = 0$, dvs. yz-planet.

6. **a)** a) Egenvektorer $X = t(1, 1, 1)$, $t \neq 0$, till egenvärdet $\lambda = 0$, och alla $X \neq \mathbf{0}$ i planet $x + y + z = 0$, till egenvärdet $\lambda = 3$.
   b) Exempelvis $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ (ortogonal) och $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.