LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
Linjär Algebra
2015–10–26 kl 8–13

Svar, kompletta lösningar och kommentarer.

1. *Svar:* Avståndet mellan planet och punkten är 2.

Lösning. Vi bildar först en vektor $\boldsymbol{u}$ som förbinder en punkt i planet, t.ex. $(1,-3,0)$, med punkten $(3,4,-1)$, alltså $\boldsymbol{u} = (3,4,-1)-(1,-3,0) = (2,7,-1)$. Tanken är att göra en uppdelning $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}''$ i två komposanter, där $\boldsymbol{u}'$ är vinkelrät mot planet och $\boldsymbol{u}''$ är parallell med planet. Det kortaste avståndet d mellan plan och punkt fås då som $d = |\boldsymbol{u}'|$.

Komposanten $\boldsymbol{u}'$ kan beräknas som den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på en normal till planet. För att få fram en sådan normal väljer vi att skriva om planets ekvation på affin form. Genom att eliminera parametrarna s och t i parameterframställningen fås

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2s-2t &=& x-1 \\ 3s &=& y+3 \\ t &=& z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2s &=& x-+2z-1 \\ 3s &=& y+3 \\ t &=& z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& 3x-2y+6z-9 \\ 3s &=& y+3 \\ t &=& z \end{array}\right. ,$$

så planets ekvation på affin form är $3x-2y+6z-9=0$. Som normal kan vi alltså välja $\boldsymbol{n} = (3,-2,6)$. Projektionsformeln ger

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n} = \frac{(3,-2,6)\cdot(2,7,-1)}{3^2+(-2)^2+6^2}(3,-2,6) = \frac{-14}{49}(3,-2,6) = \frac{-2}{7}(3,-2,6).$$

Det sökte avståndet blir $d = |\boldsymbol{u}'| = |\frac{-2}{7}(3,-2,6)| = \frac{2}{7}|(3,-2,6)| = \frac{2}{7}\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2} = 2.$

Alternativ. Istället för elimination av planets parametrar kan man utnyttja att vektorprodukten av planets riktningsvektorer också ger en normal till planet.

2. *Svar:* Den sökte matrisen är $\boldsymbol{X} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$.

Lösning. Eftersom att $\det \boldsymbol{A} = 37 \neq 0$ är $\boldsymbol{A}$ inverterbar och kan förkortas bort (multiplicera båda sidar av ekvationen med $\boldsymbol{A}^{-1}$.) Kvar har man ekvationen

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}.$$

Det följer att

$$\boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X}(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{C})^{-1},$$

under förutsättningen att matrisen $\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{C}$ är inverterbar. Eftersom att matrisen

$$\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

har determinant -1 är den inverterbar och man kontrollerar enkelt att inversen är $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ (I själva verket är matrisen ortogonal och symmetrisk och är därför sin egen invers. Det går dock lika bra att använda standardmetoden för inversberäkning.) Slutligen fås

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. *Svar:* Matrisen $\boldsymbol{S} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ diagonaliserar $\boldsymbol{A}$ med motsvarande diagonalmatris $\boldsymbol{D} = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$. Flera korrekta svar är möjliga. Genom att t.ex. normera kolonnerna i $\boldsymbol{S}$, så de får längd ett, fås en ortogonal matris som diagonaliserar $\boldsymbol{A}$.

Lösning. Matrisen har det karakteristiska polynomet $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^2 - 100 = (\lambda + 10)(\lambda - 10)$. Egenvärdena til $\boldsymbol{A}$ är lösningarna till den karakteristiska ekvationen $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = 0$, det vill säga $\lambda = 10$ och $\lambda = -10$. Egenvektorerna motsvarande egenvärdet $\lambda = 10$ är $t(3,1)$, $t \neq 0$, och egenvektorerna motsvarande $\lambda = -10$ är $t(1,-3)$, $t \neq 0$. Om man därför väljer t.ex.

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

fås $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}$, som önskat. Nu är matrisen $\boldsymbol{A}$ symmetrisk ($\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$) och teorin garanterar att vi bland alla tänkabara matriser som diagonaliserar $\boldsymbol{A}$ kan välja $\boldsymbol{S}$ som en ortogonal matris, t.ex. fungerar

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Vilken diagonalmatris $\boldsymbol{D}$ motsvarar ovanstående val?)

4. a) *Svar:* Parameterframställningen för ℓ är $(x, y) = (1,0) + t(-4,3)$, $t \in \mathbf{R}$.

Lösning. I koordinatsystemet $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ har punkterna B och B' koordinaterna $(1,0)$ respektive $(0, \frac{3}{4})$. En riktningsvektor för ℓ ges av $4\overrightarrow{BB'} = (-4,3)$. Väljer vi $B : (1,0)$ som punkt på linjen fås parameterframställningen i svaret.

b) *svar:* Punkten P har koordinaterna $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ i koordinatsystemet $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.

Lösning. Linjen m innehåller punkterna $C : (0,1)$ och $C' : (\frac{2}{3}, 0)$ och har därför den möjliga parameterframställningen $(x, y) = (0,1) + s(2,-3)$. Skärningspunkten P bestäms genom att betrakta ekvationssystemet $(1,0) + t(-4,3) = (0,1) + s(2,-3)$, som har den entydiga lösning $(s, t) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Insättning av t i ℓ's ekvation (eller s i m's) ger $P : (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

5. *Svar:* Avbildningsmatrisen för F är

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet ges av $N(\boldsymbol{A}) = \{s(1,-2,2) \ : \ s \in \mathbf{R}\}$ och kolonnrummet utgörs av vektorerna i planet $x - 2y + 2z = 0$. Rangen är två och nolldimensionen ett. Den fullständiga lösningen till ekvationen $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (0,2,2)$ är $\boldsymbol{x} = (1,0,0) + s(1,-2,2)$ där s är en reell parameter.

Lösning. Kolonnerna i avbildningsmatrisen är bilderna av basvektorerna $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_1) = (1,-2,2) \times (1,0,0) = (0,2,2)$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_2) = (1,-2,3) \times (0,1,0) = (-2,0,1)$ och $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{e}_3) = (1,-2,2) \times (0,0,1) = (-2,-1,0)$ vilket ger $\boldsymbol{A}$ som i svaret ovan. Nollrummet är enligt definitionen det samma som lösningsmängden till ekvationen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, det vill säga lösningarna till det homogena ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 \qquad - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 \qquad & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 2t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbf{R}.$$

Nollrummet spänns upp av en enda nollskild vektor, så nolldimensionen av $\boldsymbol{A}$ är 1. Dimensionssatsen ger att rangen av $\boldsymbol{A}$ är 3-1=2. Echelonformen ovan har pivotelement i första och andra kolonnen. Motsvarande kolonner $(0,2,2)$ och $(-2,0,1)$ i $\boldsymbol{A}$ utgör en bas i kolonnrummet. (Kolonnrummet utgör ett plan i rummet vars ekvation på affin form är det som angavs i svaret.) Den fullständiga lösning till ekvationen $F(\boldsymbol{x}) = (0,2,2)$ fås som summan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$ av partikulärlösningen $\boldsymbol{x}_p = (1,0,0)$ (bilden av första basvektorn) och vektorerna i nollrummet, $\boldsymbol{x}_h = t(1,-2,2)$.

6. *Svar:* Vektorn $\boldsymbol{x} = (6,2,0,6,-4)$ har de vinkelräta komposanterna $\boldsymbol{x}' = (6,-2,-1,3,-4)$, som ligger i V, och $\boldsymbol{x}'' = (0,4,1,3,0)$, som är ortogonal mot V.

Lösning. Vi söker att skriva $\boldsymbol{x}$ som en summa $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}''$ där $\boldsymbol{x}'$ ligger i V och $\boldsymbol{x}''$ är ortogonal mot V. Det första av dessa villkor betyder att det finns reella tal s, t så att $\boldsymbol{x}' = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$. Det andra kan uttryckas som att $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}'' = 0$ och $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}'' = 0$. Detta leder till ett ekvationssystem för s och t (de så kallade *normalekvationerna*) med utseendet:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}'' = 0 \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}'' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{u} - t\boldsymbol{v}) = 0 \\ \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{u} - t\boldsymbol{v}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |\boldsymbol{u}|^2 s + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\, t = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\, s + |\boldsymbol{v}|^2 t = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} \end{cases}.$$

Insättning av $\boldsymbol{u} = (3,-2,2,2,1)$, $\boldsymbol{v} = (-3,0,3,-1,5)$ och $\boldsymbol{x} = (6,2,0,6,-4)$ ges oss det konkreta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 22s + 0t = 22 \\ 0s + 44t = -44 \end{cases}$$

som har den entydiga lösning $s = 1$ och $t = -1$. Det följer att $\boldsymbol{x}' = 1\cdot(3,-2,2,2,1)+(-1)\cdot(-3,0,3,-1,5) = (6,-2,-1,3,-4)$ 0ch $\boldsymbol{x}'' = (6,2,0,6,-4)-(6,-2,-1,3,-4) = (0,4,1,3,0)$, som i svaret.

Alternativ. Observera att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. Det möjliggör en lite enklare (men mindre allmängiltig) lösning där s och t beräknas direkt genom att ta skalärprodukt av relationen $\boldsymbol{x}' = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ med var och en av vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$.