LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

EXEMPELSKRIVNING
Linjär algebra
2018–10–01

INGA HJÄLPMEDEL. Förklara dina beteckningar och motivera lösningarna väl. Om inget annat anges är baser ortonormerade och positivt orienterande.

Grunddel. För godkänt krävs att man har minst 9 av 18 möjliga poäng med noll poäng på högst en av de sex uppgifterna.

1. Bestäm, för varje värde på parametern a, den fullständiga lösningen till det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + 2y + az = 0 \end{cases}.$$

2. Bestäm den punkt i planet $\pi : (x, y, z) = (1, -3, 0) + s(2, 3, 0) + t(-2, 0, 1)$ som ligger närmast punkten $P : (3, 4, -1)$. Ange dessutom det minsta avståndet mellan π och P.

3. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(3, 8, -5)$ och $(6, 2, -3)$. Bestäm dessutom längden $|\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{u}|$ då $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är vektorer i rummet som uppfyller $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \pi/3$ och $|\boldsymbol{v}| = 2|\boldsymbol{u}| = 2$.

4. Ge den allmänna definitionen för att ett tal λ är egenvärde till en kvadratisk matris A. Visa att vektorn $(9, -27)$ är en egenvektor till matrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

och ange motsvarande egenvärde. Har matrisen ovan flera egenvärden?

5. Ange vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Endast svar behövs. (Antal poäng = $\max(3 - f, 0)$ där f anger antalet felaktiga svar.)

a) För alla kvadratiska matriser A gäller det att $\det \mathsf{A}^T = \det \mathsf{A}$.

b) Om A är en kvadratisk matris som uppfyller $\mathsf{A}\mathsf{A}^T = I$ så gäller att $\mathsf{A}^T\mathsf{A} = I$.

c) Om A och B är inverterbara matriser gäller $(\mathsf{AB})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$.

d) Om A är avbildningsmatrisen för en spegling av rummets vektorer i ett visst plan så är $\det \mathsf{A} = 1$.

e) Om kolonnerna i en $m \times n$-matris A är linjärt oberoende så har ekvationssystemet $\mathsf{AX} = 0$ den entydiga lösningen $\mathsf{X} = 0$.

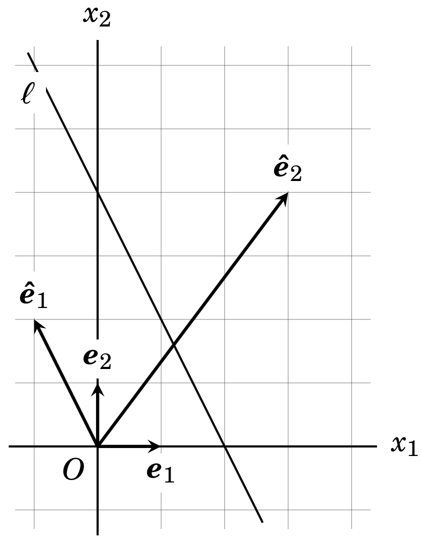
6. Lös matrisekvationen $\mathsf{A}(\mathsf{X} - \mathsf{B}) = \mathsf{AXC}$, där

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathsf{C} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd

Överbetygsdel. För överbetyg krävs godkänt på skrivningens grunddel samt 4–6 poäng på andra delen för betyget 4 eller 7–12 poäng för betyget 5.

7. Figuren till höger visar en rät linje ℓ, origo O, samt två baser i planet, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ respektive $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$. Ange en ekvation för linjen ℓ i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$. Härled sedan ℓ:s ekvation i det nya koordinatsystemet $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$. Observera att basen $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$ inte är ortonormerad.



8. Den linjära avbildningen F är en spegling av rummets vektorer i ett visst plan. Bestäm avbildningsmatrisen för F då man vet att $F((5,4,-2)) = (-3,0,6)$. Ange dessutom avbildningsmatrisens invers.

9. Låt F vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att ekvationen $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ bara har lösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Visa att ekvationen $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ är lösbar för varje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$.

10. Låt V beteckna mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\boldsymbol{u} = (3,-2,2,2,1)$ och $\boldsymbol{v} = (-3,0,3,-1,5)$. Mängden V är ett så kallad *underrum* till rummet $\mathbb{R}^5$. (V har dimensionen två eftersom de två vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är linjärt oberoende.)

Gör en uppdelning av vektorn $\boldsymbol{x} = (6,2,0,6,-4)$ i två komposanter, där den ena komposanten ligger i V och den andra är ortogonal mot varje vektor i V.

LYCKA TILL!