LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2017-06-08 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormala och positivt orienterade om inget annat anges.

1. a) Bestäm skärningen mellan linjen som innehåller punkterna

$$P_1 : (3,5,4), \quad P_2 : (-3,3,0),$$

och planet som innehåller punkterna

$$P_3 : (2,2,2), \quad P_4 : (1,0,-1), \quad P_5 : (3,2,1).$$

(0.5)

b) Bestäm den punkt på linjen $l : (x,y,z) = (1,2,3) + t(3,2,1),\ t \in \mathbb{R}$ som ligger närmast punkten $P_6 : (3,7,1)$.
Beräkna även avståndet mellan l och P_6. (0.5)

2. Lös

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & + & az & = & 2a \\ -x & - & ay & - & z & = & -2 \end{cases}$$

för alla värden på a där systemet har oändligt många lösningar.

3. Bestäm rang, nolldimension samt en bas till nollrummet för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. a) Lös matrisekvationen $AX^{-1}B = C$ där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ och } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(0.6)

b) Avgör vilka av följande avbildningar som är linjära (motiveringar krävs för poäng). (0.4)

(i) $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $F_1(\bar{\mathbf{x}}) = -2\frac{\bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\mathbf{x}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\bar{\mathbf{v}}$ där $\bar{\mathbf{v}}$ är någon vektor i $\mathbb{R}^3$.

(ii) $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $F_2(\bar{\mathbf{x}}) = -2\frac{\bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\mathbf{x}}}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\bar{\mathbf{x}}$ där $\bar{\mathbf{v}}$ är någon vektor i $\mathbb{R}^3$.

(iii) $F_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av ortogonal projektion på linjen $(x,y,z) = (3,1,-2) + t(1,2,3)$, $t \in \mathbb{R}$.

(iv) $F_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ges av sambandet $Y = AX$ där

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 4 & -7 & 10 \end{pmatrix}.$$

V.G.V.

5. a) Låt avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet $\pi : x + 2y - 2z = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen till F samt dess egenvärden och egenvektorer. (Ledning: Egenvärden och egenvektorer måste inte räknas fram om dom kan bestämmas på något annat sätt.) (0.6)

b) Låt avbildningen $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara projektion i riktningen $(1, 2, 3)$ på planet $\pi : x + 2y - 2z = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen till G samt dess egenvärden och egenvektorer. (0.4)

6. Låt avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i en positivt orienterad ortonomerad bas $\bar{\mathbf{e}}_1$,$\bar{\mathbf{e}}_2$,$\bar{\mathbf{e}}_3$.

a) Bestäm en positivt orienterad ortonomerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$,$\hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att $\hat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med $(2, 1, -2)$ och $\hat{\mathbf{e}}_2$ ligger i planet $2x - 2y + z = 0$. (0.3)

b) Låt $\hat{A}$ vara avbildningsmatris till F i det nya koordinatsystemet $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$,$\hat{\mathbf{e}}_3$. Bestäm $\hat{A}$, beräkna dess egenvärden och egenvektorer samt avgör om någon av $\hat{A}$ och A är diagonaliserbar. (0.4)

c) Bestäm $\hat{A}^n$ och beräkna $A^n X$ där

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(0.3)

LYCKA TILL!