

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska innehålla ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. a) Bestäm de värden på parametern a för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 4x + ay + 4z = 2 \end{cases}$$

har oändligt många lösningar. Ange även lösningarna i dessa fall. (0.8)

- b) Antag att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & a & 4 \end{pmatrix}$$

är avbildningsmatris för en linjär avbildning F . För vilka värden på a gäller det att $(2, 1, 2)$ ligger i värdemängden för F ? (0.2)

2. Planet π innehåller punkterna $O : (0, 0, 0)$, $P : (-1, 1, 2)$ och $Q : (3, 1, -2)$.

a) Bestäm en ekvation på affin form för planet π . (0.3)

b) Bestäm avbildningsmatrisen för ortogonal projektion på planet π . (0.5)

c) Bestäm rang och nulldimension för matrisen i b). (0.2)

3. Låt l_1 och l_2 vara linjerna

$$l_1 : (x, y, z) = t(1, 1, -1), \quad l_2 : (x, y, z) = t(2, 1, 0).$$

Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ sådan att \hat{e}_1 är parallell med l_1 och \hat{e}_2 är ortogonal mot l_2 . Ange även en ekvation på parameterform för l_1 respektive l_2 med avseende på den nya basen $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ (samma origo).

4. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

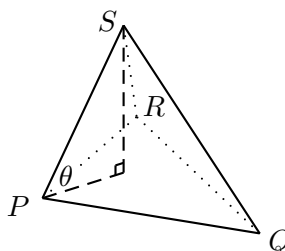
dvs. bestäm en inverterbar matris S samt en diagonalmatris D så att $S^{-1}AS = D$. Beräkna sedan A^{200} .

5. En tetraeder har hörn i $P : (1, 1, 1)$, $Q : (3, 2, 1)$, $R : (1, 2, 2)$ och $S : (1, -1, 3)$.

a) Bestäm arean av sidoytan PQR . (0.3)

b) Bestäm tetraederns höjd från hörnet S . (0.3)

c) Bestäm vinkeln θ mellan kanten PS och sidoytan PQR (se figuren). Arcusfunktioner får ingå i svaret. (0.4)



Var god vänd!

6. a) En linjär avbildning avbildar vektorerna $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ och $(0, 0, 1)$ på vektorerna $(1, 0, 2)$, $(0, 1, 4)$ respektive $(2, 1, -1)$. Bestäm avbildningsmatrisen A för denna avbildning. (0.4)
- b) Låt B vara nedanstående matris, för vilken vi endast känner till de två första kolonnerna:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 2 & -1 & ? \\ -4 & 2 & ? \end{pmatrix}.$$

Antag vidare att B är inverterbar, så att vi kan bilda inversen B^{-1} . Är det då, med informationen ovan, möjligt att avgöra hur den första kolonnen i matrisen B^{-1} ser ut? Om så är fallet, bestäm denna första kolonn; om inte, förklara varför det inte går.

Tips: Vad blir $B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ respektive $B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$? (0.3)

- c) Formulera ett allmänt kriterium: Om vi endast känner till två utav tre kolonner i en inverterbar 3×3 -matris B , vad måste då gälla för att vi säkert ska kunna veta hur en viss kolonn i B^{-1} ser ut? Motivera ditt svar! (0.3)

LYCKA TILL!