LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär algebra
2017 – 01 – 09, kl. 14 – 19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga och tydliga motiveringar. Ge tydliga svar där så är möjligt. Om inget annat anges är koordinatsystemen ortonormerade och positivt orienterande.

1. Ange skärningspunkten mellan linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \ 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} .$$

Beräkna vinkeln mellan de båda linjerna.

2. a) Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $P_1 :\ (1, 1, 0)$, $P_2 :\ (1, 0, 1)$, och $P_3 :\ (2, 1, 2)$. (0.5)

b) Bestäm avståndet från punkten $P :\ (3, 1, 0)$ till det plan, som går genom punkterna P_1, P_2 och P_3. (0.5)

3. a) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en avbildning definierad genom

$$\mathbf{F}\left((x_1, x_2, x_3)\right) = (x_1 + 2x_3,\ 3x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2).$$

Visa att $\mathbf{F}$ är linjär och ange värdemängden av $\mathbf{F}$. (0.5)

b) För den linjära avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gäller

$$\mathbf{F}\left((2, 1)\right) = (1, 2) \quad \text{och} \quad \mathbf{F}\left((3, 1)\right) = (1, 1).$$

Beräkna $\mathbf{F}\left((-5, -1)\right)$. (0.5)

4. a) Bestäm rangen och nolldimensionen för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

och ange en bas till nollrummet av A. (0.5)

b) Lös matrisekvationen $(X + C)^{-1}\, C = D^{-1}$, där

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (0.5)$$

V.g. vänd!

5. Avbildningsmatrisen A för en linjär avbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm avbildningsmatrisen till den sammansatta avbildningen $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} \circ \mathbf{F}$. (0.4)

b) Bestäm avbildningsmatrisen till avbildningen $\mathbf{F}_{50}$, där $\mathbf{F}_{50}$ är definierad genom sammansättning av 50 stycken $\mathbf{F}$, dvs, $\mathbf{F}_{50} = \mathbf{F} \circ \mathbf{F} \circ \cdots \circ \mathbf{F}$. (0.6)

6. a) I ett ortonormerad bas $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ i planet väljer vi en ny bas $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$, där

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = 2\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} \\ \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \end{cases}$$

Beräkna skalärprodukten $\hat{\mathbf{u}} \bullet \hat{\mathbf{v}}$ av vektorerna $\hat{\mathbf{u}} = (1, 1)$ och $\hat{\mathbf{v}} = (-2, 1)$, som ges i den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{1}, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$. (0.5)

b) En tetraeder har hörn i punkterna $P_0 : (0, 0, 0),\ P_1 : (1, 1, 1),\ P_2 : (0, 1, 2)$ och $P_3 : (2, -2, 0)$. Den ortogonala projektionen av tetraedern på planet $-x+2y-z = 0$ blir en parallellogram. Bestäm parallellogrammens area. (0.5)