LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2016-10-24 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som beskriver spegling i linjen $x+y=0$.

a) Bestäm bilden av $(1,0)$ respektive $(0,1)$. (0.5)

b) Bestäm matrisen för avbildningen F. (0.5)

2. För en triangel ges två hörn av punkterna $(1,2,8)$ och $(5,1,2)$. Det tredje hörnet ges av skärningspunkten mellan linjen $(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,2,3)$ och linjen $(x,y,z) = (-4,5,2) + t(3,-1,1)$. Bestäm koordinaterna för det tredje hörnet samt triangelns area. (Positivt orienterat, ortonormerat system.)

3. Låt A och B vara matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen X så att

$$A(X+B)^{-1} = B.$$

4. a) Ange förutsättningar och bevisa formeln för $(AB)^{-1}$. (0.5)

b) Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska (under naturliga förutsättningar om ingående matriser). Inga motiveringar krävs. Varje felaktigt/uteblivet svar ger -0.2 ner till 0. (0.5)

$$\begin{array}{lrcl} i. & \det(A+B) & = & \det(A)+\det(B) \\ ii. & (A+B)^T & = & A^T + B^T \\ iii. & (A+B)^{-1} & = & A^{-1} + B^{-1} \\ iv. & \det(AB) & = & \det(A)\det(B) \\ v. & (AB)^T & = & A^T B^T \end{array}$$

5. Beräkna A^{100} för

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. I basen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ har tre vektorer koordinaterna $(3,1,1), (1,3,1), (1,1,3)$ medan de i basen $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$ har koordinaterna $(2,1,1), (1,-2,1)$ respektive $(2,2,1)$. Vilka koordinater får var och en av basvektorerna $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ i basen $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$?

LYCKA TILL!