LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2016-08-25 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormala och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Låt $\bar{\mathbf{u}} = (1, 2, 1)$, $\bar{\mathbf{v}} = (1, 1, 0)$ och $\bar{\mathbf{w}} = (4, 3, 2)$.

a) Beräkna $\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$, $|\bar{\mathbf{u}}|$, $|\bar{\mathbf{v}}|$ och bestäm vinkeln mellan $\bar{\mathbf{u}}$ och $\bar{\mathbf{v}}$. (0.4)

b) Bestäm volymen av den parallellepiped som har kanterna $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$ samt avgör om vektorerna $\bar{\mathbf{u}}$,$\bar{\mathbf{v}}$,$\bar{\mathbf{w}}$ är linjärt oberoende. (0.4)

c) Ett klot K med volymen 5 avbildas av en linjär avbildning F på en ellipsoid E. Avbildningen F har en avbildningsmatris med kolonnvektorerna $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}$. Bestäm volymen av E. (0.2)

2. Beräkna den ortogonala projektionen av punkten $P : (1, 2, 3)$ på planet π som innehåller punkterna $Q_1 : (-3, 4, -5)$, $Q_2 : (1, 0, -1)$ och $Q_3 : (-2, 1, 0)$. Bestäm även avståndet mellan P och π.

3. a) Låt $\bar{\mathbf{e}}_1$,$\bar{\mathbf{e}}_2$,$\bar{\mathbf{e}}_3$ vara en ON-bas för $\mathbb{R}^3$. Vektorerna $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$,$\hat{\mathbf{e}}_3$ har koordinaterna $\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ respektive $\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ i basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$. Visa att $\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$,$\hat{\mathbf{e}}_3$ också är en ON-bas för $\mathbb{R}^3$. (0.4)

b) Vektorn $\bar{\mathbf{v}}$ har koordinaterna $\bar{\mathbf{v}} = (1, 1, 1)$ i basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$. Bestäm koordinaterna för $\bar{\mathbf{v}}$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.
Vektorn $\bar{\mathbf{u}}$ har koordinaterna $\bar{\mathbf{u}} = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, 0)$ i basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. Bestäm koordinaterna för $\bar{\mathbf{u}}$ i basen $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$. (0.6)

4. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildar vektorn $\bar{\mathbf{u}}_1 = (3, 2, 1)$ på $F(\bar{\mathbf{u}}_1) = (1, 0, 0)$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = (1, 3, 2)$ på $F(\bar{\mathbf{u}}_2) = (1, 1, 0)$ och $\bar{\mathbf{u}}_3 = (7, 3, 1)$ på $F(\bar{\mathbf{u}}_3) = (2, 0, 1)$. Beräkna avbildningsmatrisen för den inversa avbildningen F^{-1}. Bestäm även alla vektorer som avbildas av F på $(4, 2, 0)$.

V.G.V.

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 2a & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm för vilka värden på a som $\det A = 0$. (0.2)

b) Bestäm nolldimensionen samt en bas för nollrummet till matrisen A för de värden på a där $\det A = 0$. (0.4)

c) För ett visst givet högerled (y_1, y_2, y_3) och ett visst a är både $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, p)$ och $(x_1, x_2, x_3) = (-2, 3, q)$ (där p och q är okända tal) lösningar till systemet

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & ax_3 & = & y_2 \\ x_1 & + & 2ax_2 & + & 3x_3 & = & y_3 \end{array} \right. .$$

Bestäm a och beräkna differensen $p - q$. (0.4)

6. a) Diagonalisera matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(0.4)

b) Beräkna matrisen

$$B = \lim_{n \to \infty} A^n,$$

samt bestäm dess egenvärden och egenvektorer. (0.4)

c) Antag att matrisen B ovan är avbildningsmatris för en linjär avbildning. Hur kan denna avbildning tolkas geometriskt? (0.2)

LYCKA TILL!