LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2016-03-14 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Lös, för varje värde på a, ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x \phantom{{}+y} - az = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}.$$

2. **a)** Bestäm en ekvation på affin form för planet π som innehåller punkterna $P_1 : (1, 0, 3)$, $P_2 : (2, -1, 1)$ och $P_3 : (-1, 2, -1)$. (0.3)

b) Bestäm en ekvation för linjen l som utgör skärningen mellan planet π i **a)** och planet med ekvation $2x + y - z - 2 = 0$. (0.2)

c) Bestäm kortaste avståndet mellan punkten P_1 i **a)** och linjen l i **b)**. (0.5)

3. **a)** Låt A vara en kvadratisk matris. Definiera vad som menas med att A är inverterbar. (0.2)

b) Visa att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ då A och B är inverterbara. (0.2)

c) Lös matrisekvationen $AX + 3X = B$ då (0.6)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. **a)** Endast svar krävs på denna deluppgift. Låt A vara en 3×3-matris och $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ange alla implikationer/ekvivalenser mellan följande påståenden: (0.4)

1: $\det A = 0$, 2: $\det A \neq 0$,
3: $AX = 0$ har entydig lösning, 4: $AX = Y$ saknar lösning.

b) Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en ortonormerad bas i planet. Skapa en ny (ej nödvändigtvis ortonormerad) bas $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ sådan att $\mathbf{e}_1'$ är vinkelrät mot vektorn $(-2, 1)$ och sådan att den vektor som har koordinaterna $(3, -1)$ med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ får koordinaterna $(1, 1)$ i basen $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$. (0.6)

Var god vänd!

5. a) Den linjära avbildningen F avbildar vektorerna

$$(1,2) \ \text{ och } \ (3,4) \qquad \text{på} \qquad (3,4) \ \text{ respektive } \ (5,6).$$

Bestäm avbildningsmatrisen för F. (0.5)

b) Avbildningen G avbildar vektorerna

$$(1,2) \ \text{ och } \ (2,4) \qquad \text{på} \qquad (3,4) \ \text{ respektive } \ (5,6).$$

Kan G vara linjär? (0.2)

c) Låt avbildningsmatrisen A svara mot den linjära avbildning som ortogonalt projicerar rummets vektorer på planet

$$2016\,x + 3\,y + 14\,z = 0.$$

Bestäm rangen och determinanten av A. Avgör även om A är inverterbar. (0.3)

6. a) Låt A vara en kvadratisk matris. Definiera begreppen egenvärde och egenvektor för A. (0.2)

b) För matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & d \\ c & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

gäller det att $D = S^{-1}AS$. Bestäm konstanterna a, b, c, d, e och f. (0.8)

LYCKA TILL!