LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2016-01-11 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje värde på a, antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 4x + 5y + 2az = 4 \end{cases}.$$

2. Betrakta punkterna $P_1 : (1,1,1)$, $P_2 : (2,3,4)$, $P_3 : (5,6,7)$ och $P_4 : (4,1,4)$.

a) Bestäm arean av triangeln med hörn i P_1, P_2 och P_3. (0.2)

b) Bestäm en ekvation på affin form för planet genom P_1, P_2 och P_3. (0.2)

c) Bestäm volymen av tetraedern med hörn i P_1, P_2, P_3 och P_4. (Volymen av en tetraeder är en sjättedel av volymen av motsvarande parallellepiped.) (0.2)

d) Från P_4 dras en höjd till tetraedern i **c)**, dvs. en linje vinkelrät mot planet i **b)**. I vilken punkt träffar denna höjd planet? (0.4)

3. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vara en bas i planet, och inför nya vektorer $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ genom

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2. \end{cases}$$

Visa att också $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ är en bas i planet. Bestäm koordinaterna med avseende på basen $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ för den vektor som i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ har koordinaterna $(1,2)$. Bestäm även koordinaterna med avseende på basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ för den vektor som i basen $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ har koordinaterna $(1,2)$.

4. På denna uppgift skall endast svar ges. Ange vilka av påståendena nedan som är sanna respektive falska. Varje rätt svar ger 0.2 poäng, varje fel svar ger -0.2 poäng och varje uteblivet svar ger 0.0 poäng. (Du kan dock inte få negativ poäng totalt på uppgiften)

a) För alla $n \times n$-matriser A och B gäller det att $(A+B)^T = A^T + B^T$.

b) För alla inverterbara $n \times n$-matriser A och B gäller det att $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

c) Om det för 3×3-matrisen A gäller att $\operatorname{rang} A = 3$ så är A inverterbar.

d) Om kolonnvektorerna i en 3×4-matris spänner upp $\mathbb{R}^3$ så är dessa kolonnvektorer linjärt oberoende.

e) Låt A vara en kvadratisk matris. Om ekvationssystemet $AX = Y$ är lösbart för alla Y så har detta system entydig lösning för alla Y.

Var god vänd!

5. Vektorerna i rummet projiceras först ortogonalt på xz-planet, varefter de vrides $\frac{\pi}{2}$ radianer kring z-axeln, i positiv led sett från spetsen av z-axeln. Bestäm matrisen A för denna sammansatta avbildning F. Bestäm rang och nolldimension för A, samt en bas för nollrummet. Ange slutligen värdemängden till F.

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A. (0.3)

b) Diagonalisera A, dvs. ange en inverterbar matris S och en diagonalmatris D sådana att $S^{-1}AS = D$. Välj här, om det är möjligt, S som ortogonal matris. (0.3)

c) Antag att matrisen B har en ortogonal bas av egenvektorer. Visa att $B^TB = BB^T$. (0.4)

LYCKA TILL!