LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Linjär algebra
2015–10–26 kl 08–13

INGA HJÄLPMEDEL. Förklara dina beteckningar och motivera lösningarna väl. Om inget annat anges är baser ortonormerade och positivt orienterande.

1. Bestäm minsta avståndet mellan punkten $(3,4,-1)$ och planet med parameterframställningen $(x,y,z)=(1,-3,0)+s(2,3,0)+t(-2,0,1)$.

2. Lös matrisekvationen $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{AXC}$, där

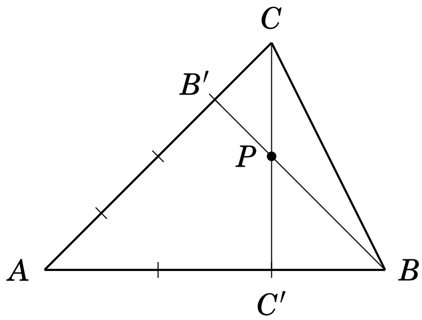
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 11\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{och}\quad \boldsymbol{C}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Diagonalisera matrisen

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 6 & -8\end{pmatrix},$$

det vill säga bestäm en inverterbar matris $\boldsymbol{S}$ och en diagonalmatris $\boldsymbol{D}$ sådan att $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{D}$. Kan $\boldsymbol{S}$ väljas som en ortogonal matris?

4. I triangeln ABC delas sidan AB i tre lika stora delar och sidan AC i fyra lika stora delar. I figuren betecknar B' och C' två av dessa delningspunkter. Sätt $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{AB}$ och $\boldsymbol{e}_2=\overrightarrow{AC}$, och låt ℓ beteckna linjen genom B och B' samt m linjen genom C och C'.



a) Ange en parameterframställning för ℓ i koordinatsystemet $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$. (0.4)

b) Bestäm koordinaterna (i systemet $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$) för skärningspunkten P mellan linjerna ℓ och m. (0.6)

5. Bestäm avbildningsmatrisen $\boldsymbol{A}$ för den linjära avbildning F av rummets vektorer som ges av $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}$ där $\boldsymbol{u}=(1,-2,2)$. Ange nollrummet och kolonnrummet för $\boldsymbol{A}$, samt dess rang och nolldimension. Lös dessutom ekvationen $F(\boldsymbol{x})=(0,2,2)$ fullständigt.

6. Låt V beteckna mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $\boldsymbol{u}=(3,-2,2,2,1)$ och $\boldsymbol{v}=(-3,0,3,-1,5)$. Mängden V är ett så kallad *underrum* till rummet $\mathbf{R}^5$ (med dimensionen två eftersom att $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är linjärt oberoende.)

Gör en uppdelning av vektorn $\boldsymbol{x}=(6,2,0,6,-4)$ i två komposanter, där den ena komposanten ligger i V och den andra är ortogonal mot V.

LYCKA TILL!