LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2020-05-30

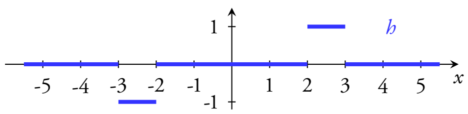
1. Om $u(x,t)$ betecknar den transversella utböjningen ges en matematisk modell av

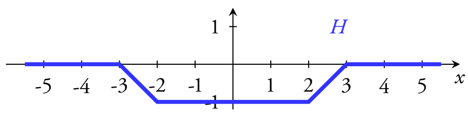
$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x,0) = h(x), & x > 0. \end{cases}$$

Låt u vara den udda speglingen av u med avseende på x. Då gäller att

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u'_t(x,0) = \theta(x+2) - \theta(x+3) + \theta(x-2) - \theta(x-3), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Med beteckningen $h = u'_t(x,0)$ för den udda utvidgade hastigheten och H för den primitiva $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(y)\,\mathrm{d}y$



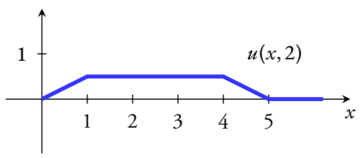


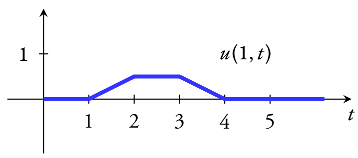
så ger d'Alemberts formel att lösningen är $u(x,t) = \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t))$ och därmed

$$u(x,2) = \tfrac{1}{2}(H(x+2) - H(x-2)), \quad \text{då } x \geqslant 0,$$

och eftersom H är jämn

$$u(1,t) = \tfrac{1}{2}(H(t+1) - H(1-t)) = \tfrac{1}{2}(H(t+1) - H(t-1)), \quad \text{då } t \geqslant 0.$$





2. Eftersom $(\mathrm{e}^{-x} \mid \mathrm{e}^{2-x}) = 1/4$ så är funktionerna inte ortogonala. För att hitta en ortogonal bas i det linjära rum de spänner upp används Gram-Schmidt. Sätt $\varphi_1 = \mathrm{e}^{-x}$, då blir

$$\varphi_2 = \mathrm{e}^{-2x} - \frac{(\varphi_1 \mid \mathrm{e}^{-2x})}{(\varphi_1 \mid \varphi_1)}\,\varphi_1 = \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1/4}{1/3}\,\varphi_1 = \mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Integralen blir minst då

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{e}^{-x} + b\,\mathrm{e}^{-2x} &= \mathrm{P}_{[\mathrm{e}^{-x},\mathrm{e}^{-2x}]}\,1 = \mathrm{P}_{[\varphi_1,\varphi_2]}\,1 = \frac{(\varphi_1 \mid 1)}{(\varphi_1 \mid \varphi_1)}\,\varphi_1 + \frac{(\varphi_2 \mid 1)}{(\varphi_2 \mid \varphi_2)}\,\varphi_2 \\ &= \frac{1/2}{1/3}\,\varphi_1 + \frac{-1/24}{1/80}\,\varphi_2 = \frac{3}{2}\varphi_1 - \frac{10}{3}\varphi_2 = 4\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{10}{3}\,\mathrm{e}^{-2x}, \end{aligned}$$

Svar: Inte ortogonala och minst då $a = 4$ och $b = -10/3$.

3. Den karakteristiska kurvan löser systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = x, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = y, & y(0) = 1, \\ \dot{z} = -y\,z, & z(0) = x_0^2. \end{cases}$$

Första ekvationen har lösningen $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^t$ och den andra ekvationen har lösningen $y(t) = \mathrm{e}^t$. Sätter man in detta i den tredje ekvationen blir den $\dot{z}(t) = -\mathrm{e}^t\,z(t)$, $z(0) = x_0^2$ och har då lösningen $z(t) = C\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{e}^t)}$ och därmed $z(0) = C\,\mathrm{e}^{-1} = x_0^2$ vilket ger $z(t) = x_0^2\,\mathrm{e}^{(1-e^t)}$. Återstår att från uttrycken för x och y lösa ut t och y_0 det vill säga

$$\begin{cases} x = x_0\,\mathrm{e}^t, \\ y = \mathrm{e}^t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \ln(y), \\ x_0 = x/y, \end{cases}$$

vilket insatt i uttrycket för $z(t)$ ger u.
Svar: Lösningen är $u(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \mathrm{e}^{(1-y)}$.

4. Modell

$$\begin{cases} u_t' - D\,u_{xx}'' = 0, & x > 0, t > 0, \\ u_x'(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = m\,\delta(x-1), & x > 0. \end{cases}$$

Låt u vara den jämna fortsättningen av u med avseende på x. Då gäller att

$$\begin{cases} u_t' - D\,u_{xx}'' = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = m\,\delta(x-1) + m\,\delta(x+1), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Med $G(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(4Dt)}$ blir då

$$u(x,t) = G * (m\,\delta_1 + m\,\delta_{-1})(x,t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi D t}}\left(\mathrm{e}^{-(x-1)^2/(4Dt)} + \mathrm{e}^{-(x+1)^2/(4Dt)}\right).$$

Vid slutna änden, $x = 0$, är koncentrationen

$$u(0,t) = \frac{m}{\sqrt{\pi D t}}\,\mathrm{e}^{-1/(4Dt)}\,.$$

Koncentrationen är positiv och går mot 0 då t går mot 0 eller ∞. Derivation med avseende på t ger att koncentrationene är störst då $t = 1/2D$ vilket ger maximal koncentration $m\sqrt{2/(\pi\,\mathrm{e})} = 0{,}48$.

5. Beteckna paketets längd, bredd och höjd med L, B respektive H, och rummets, frysens och paketets temperaturer med T_r, T_f respektive u. Då kan den matematiska modellen skrivas

$$\begin{cases} u_t' - a\,\Delta u = 0 & \text{i paketet,} \\ u = T_r & \text{på randen,} \\ u = T_f & \text{då } t = 0. \end{cases}$$

Homogenisering av randvillkoren $v = u - T_r$ ger istället systemet

$$\begin{cases} v_t' - a\,\Delta v = 0 & \text{i paketet,} \\ v = 0 & \text{på randen,} \\ v = T_f - T_r & \text{då } t = 0. \end{cases}$$

På grund av de homogena dirichletvillkoren ansätts sinusserier i både x, y och z-led

$$\varphi_{jkl} = \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{B}y\right)\sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right),\ 0 < x < L,\ 0 < y < B,\ 0 < z < H,$$

vilket ger

$$v = \sum_{j,k,l=1}^{\infty} c_{jkl}\,\mathrm{e}^{-a\lambda_{jkl}t}\,\varphi_{jkl}, \quad \text{med} \quad \lambda_{jkl} = \frac{j^2\pi^2}{L^2} + \frac{k^2\pi^2}{B^2} + \frac{l^2\pi^2}{H^2}$$

och

$$\begin{aligned} c_{jkl} &= \frac{(\varphi_{jkl} \mid T_f - T_r)}{(\varphi_{jkl} \mid \varphi_{jkl})} \\ &= (T_f - T_r)\frac{2}{L}\frac{2}{B}\frac{2}{H}\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \int_0^B \sin\left(\frac{k\pi}{B}y\right)\mathrm{d}y \int_0^H \sin\left(\frac{l\pi}{H}z\right)\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Här är $c_{jkl} = (T_f - T_r)(\frac{4}{\pi})^3\frac{1}{jkl}$ om j, k och l alla är udda annars $= 0$. Om man approximerar med första termen i utvecklingen av v och återgår till u får man

$$u = T_r + c_{111}\,\mathrm{e}^{-a\lambda_{111}t}\,\varphi_{111} \quad \text{där } c_{111} = (T_f - T_r)\frac{4^3}{\pi^3}.$$

I paketets centrum $x = L/2$, $y = B/2$, $z = H/2$ är $\varphi_{111} = 1$ vilket ger uttrycket

$$a = \frac{1}{\lambda_{111}t}\ln\frac{c_{111}}{u - T_r} = \frac{1}{t}\frac{1}{\pi^2(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{H^2})}\ln\left(\frac{T_f - T_r}{u - T_r}\frac{4^3}{\pi^3}\right)$$

för värmediffusiviteten. Sätter man i detta och i uttrycken för λ_{111} och c_{111} in siffrorna $L = 0{,}15$ m, $B = 0{,}09$ m, $H = 0{,}05$ m, $T_f = -18°$ C, $T_r = 20°$ C, $u = -1$ och $t = 3600$ s erhålls svaret.

Svar: Värmediffusiviteten blir $a = 6{,}5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ ($= 2{,}4\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{h}$).

6. I exempel S.4 sidorna 337 - 339 i läroboken bestäms egenfunktioner och egenvärden till operatorn $\mathscr{A}$. Resultatet kan sammanfattas i följande tabell (beteckningar som i boken)

Egenvärden	*Egenfunktioner*
$\lambda_{0k} = \alpha_{0k}^2,\ k = 1, 2, \ldots$	$\mathrm{J}_0(\alpha_{0k}r),\ k = 1, 2, \ldots$
$\lambda_{nk} = \alpha_{nk}^2,\ n, k = 1, 2, \ldots$	$\mathrm{J}_n(\alpha_{nk}r)\cos(n\theta),\quad \mathrm{J}_n(\alpha_{nk}r)\sin(n\theta),\ n, k = 1, 2, \ldots$

Figuren i kombination med informationen i tabellen ger att $n = 4$, 4 svängningar i θ-led och $k = 2$, två nollställen i r-led för $0 \leqslant r < 1$. Alltså är egenvärdet $\alpha_{42}^2 = 11{,}065^2 = 122{,}43$.

Av tabellen ovan ser vi att det finns två linjärt oberoende egenfunktioner som kan väljas till till exempel $\mathrm{J}_4(\alpha_{42}r)\cos(4\theta)$ och $\mathrm{J}_4(\alpha_{42}r)\sin(4\theta)$. Funktionen φ i bilden är någon linjärkombination av dessa.

Låt $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en uppräkning av egenfunktionerna valda så att en av dessa, säg φ_1, är φ. Utveckla $u(x, y, t)$ i denna bas. Skriv

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x, y).$$

Insättning i den partiella differentialekvationen leder till att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(u_k''(t) + c^2\lambda_k u_k(t)\right)}_{=0} \varphi_k(x, y) = 0.$$

Alltså är $u_k(t) = a_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}t) + b_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}t)$. Då är

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}t) + b_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}t)\right) \varphi_k(x, y) .$$

Begynnelsevillkoret $u_t'(x, y, 0) = 0$ ger att alla $b_k = 0$. Det andra begynnelsevillkoret ger att

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x, y) .$$

Alltså är $a_1 = 1$ och övriga $a_k = 0$. Vidare vet vi sen tidigare att $\lambda_1 = \alpha_{42}^2$.
Svar: Egenvärdet är $\alpha_{42}^2 = 122{,}43$ till vilket det hör två linjärt oberoende egenvektorer. Lösningen är $u(x, y, t) = \cos(c\alpha_{42}t)\,\varphi(x, y)$ då $x^2 + y^2 < 1$ och $t > 0$.