LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2020-04-24

1. En lösning är

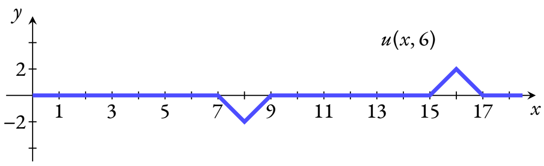
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\, \mathrm{e}^{-x^2/(4t+1)}\, \mathrm{e}^{-3t}\,.$$

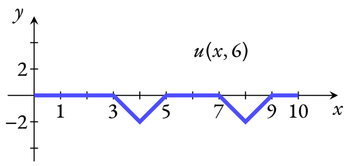
2. Legendrepolynomen är ortogonala i $L_2([-1,1])$ och projektionsformeln ger det bäst approximerande tredjegradspolynomet $\dfrac{1}{16}(15x^2+3)$.

3. Modell

$$\begin{cases} u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x > 0 \\ u'_t(x,0) = 0, & x > 0, \end{cases}$$

om $\tilde{g}$ är udda utvidgning av g så kan lösningen skrivas $u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{g}(x+2t) + \tilde{g}(x-2t)\big)$, $x > 0$, $t > 0$ och där $u(x,6)$ har följande graf, den andra då fast inspänd i $x = 10$ också





4. Tidsoberoende värmeledningsproblem där $q = 60$, $\lambda = 0{,}3$ och $\alpha = (2,1)$.

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{q}{\lambda}\,\delta_\alpha, & x^2 + y^2 < 25, \\ u = 20, & x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Efter homogenisering och spegling till $\tilde{\alpha} = (10,5)$ ger Greenfunktionen lösningen

$$u(x,y) = 20 - \frac{1}{2\pi}\frac{60}{0{,}3}\Big(\ln|(x,y)-(2,1)| - \ln\big(\frac{1}{\sqrt{5}}|(x,y)-(10,5)|\big)\Big)$$

med temperaturen i origo $u(0,0) = 20 + \frac{100}{2\pi}\ln 5 \approx 45{,}6^\circ$ C.

5. Använder testfunktioner $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ som passar bättre med fouriertransformer och en tempererade distribution $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Definitionen av translation är då $(\tau_b U)(\varphi) \overset{\mathrm{t}}{=} U(\tau_{-b}\varphi)$, definitionen av fouriertransform $(\widehat{U})(\varphi) \overset{\mathcal{F}}{=} U(\widehat{\varphi})$ och definitionen av multiplikation med $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $(gU)(\varphi) \overset{\mathrm{m}}{=} U(g\varphi)$. För translation och testfunktion φ gäller enligt formelsamlingen (3) och (4) att $\widehat{\tau_b\varphi} \overset{(3)}{=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi}\,\widehat{\varphi}$ och $\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b\xi}\,\varphi} \overset{(4)}{=} \tau_b\widehat{\varphi}$. För en godtycklig testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gäller

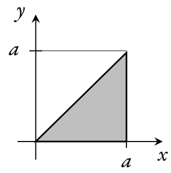
$$(\widehat{\tau_b U})(\varphi) \overset{\mathcal{F}}{=} (\tau_b U)(\widehat{\varphi}) \overset{\mathrm{t}}{=} U(\tau_{-b}\widehat{\varphi}) \overset{(4)}{=} U(\widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi}\,\varphi}) \overset{\mathcal{F}}{=} \widehat{U}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi}\,\varphi) \overset{\mathrm{m}}{=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi}\,\widehat{U}(\varphi).$$

Detta visar att $\widehat{\tau_b U} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi}\,\widehat{U}$, det vill säga att regel (3) gäller i distributionsmening också.

Lösningen på faltningsekvationen är $U = \frac{5}{2}\sin(2x)$.

6. För kvadraten se exempel 3.13. Det gäller att finna egenfunktioner ψ och egenvärden λ till operatorn $-\Delta$ på kvadraten respektive triangeln med homogena Dirichletvillkor. Egenvärden är $\lambda_{j,k} = \pi^2(j^2+k^2)/a^2$ och egenfrekvenser och svängningsmoder för en kvadrat med sidan a är, se exempel 3.13,

$$f_{j,k} = \frac{c}{2a}\sqrt{j^2+k^2}, \quad \psi_{j,k}(x,y) = \sin(j\pi x/a)\sin(k\pi y/a), \quad j,k = 1,2,\ldots$$



Lägg triangeln som i figuren. Utvidga problemet till hela kvadraten genom att spegla udda i diagonalen $x = y$. Då ses att varje egenfunktion på triangeln ger en egenfunktion på kvadraten som är udda kring $x = y$ och speciellt 0 längs $x = y$ och som har samma egenvärde. Eftersom egenfunktioner $\psi_{j,j}$ till enkla egenvärden $\lambda_{j,j}$ för kvadraten inte alltid är 0 på diagonalen duger inte dessa för triangeln. Detsamma gäller för $\psi_{j,k}$, $j \neq k$, men eftersom $\lambda_{j,k} = \lambda_{k,j}$ så är alla linjärkombinationer av $\psi_{j,k}$ och $\psi_{k,j}$ också egenfunktioner med samma egenvärde och speciellt kombinationen $\psi_j = \psi_{j,k} - \psi_{k,j}$ har egenskapen att den är 0 på diagonalen och är därmed en egenfunktion även på triangeln. Detta ger att de tre lägsta egenfrekvenserna resp svängningsmoderna på triangeln är

$$f_1 = \frac{c}{2a}\sqrt{5}, \quad \psi_1(x,y) = \sin(\pi x/a)\sin(2\pi y/a) - \sin(2\pi x/a)\sin(\pi y/a),$$
$$f_2 = \frac{c}{2a}\sqrt{10}, \quad \psi_2(x,y) = \sin(\pi x/a)\sin(3\pi y/a) - \sin(3\pi x/a)\sin(\pi y/a),$$
$$f_3 = \frac{c}{2a}\sqrt{13}, \quad \psi_3(x,y) = \sin(2\pi x/a)\sin(3\pi y/a) - \sin(3\pi x/a)\sin(2\pi y/a).$$