LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2019–08–23

**1.** En modell för temperaturen $u(x,t)$ i staven är

$$\begin{cases} u'_t - a\,u''_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 20, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \end{cases}$$

där $a$ betecknar värmediffusiviteten i staven. Efter homogenisering av randvillkoret, udda utvidgning och slutligen faltning med greenfunktionen för värmeledning blir lösningen $u(x,t) = 20\big(1 - \operatorname{erf}(x/\sqrt{4at})\big)$, $x > 0$, $t > 0$.

**2.** Mängden $U$ är en delmängd av $\mathrm{L}_2([-1,1])$ eftersom normen $\|p\|_{\mathrm{L}_2} = (\int_{-1}^{1} p'(x)^2\,\mathrm{d}x)^{1/2}$ finns för varje polynom $p \in U$. Om $p_1, p_2 \in U$ och $\alpha_1, \alpha_2$ är två skalärer så följer av räkneregler för polynom att $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ är ett polynom av högst grad 3 och av deriveringsregler att

$$(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)'(0) = \alpha_1 p_1'(0) + \alpha_2 p_2'(0) = 0$$

varför $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \in U$ vilket visar att $U$ är ett linjärt underrum. Ett godtyckligt polynom $p$ av grad högst 3 kan skrivas

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \qquad \text{med } a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ skalärer.}$$

Om $p \in U$ så måste $a_1 = 0$. Därför blir polynomen $1$, $x^2$ och $x^3$ en bas (inte ortonormerad) och därmed $\dim U = 3$. Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod på dessa polynom ger den ortogonal basen $1$, $x^2 - 1/3$ och $x^3$.

Det alternativa förslaget får inte kallas skalärprodukt för den bryter mot de grundläggande reglerna. Till exempel är $(1 \mid 1)_{\mathrm{alt}} = \int_{-1}^{1} 1'1'\,\mathrm{d}x = 0$.

**3.** Lösningen är $u(r,t) = \cos(c\alpha_{02}t)\,\mathrm{J}_0(\alpha_{02}r)$ där $c$ är vågutbredningshastigheten.

**4.** Lösningen är $u(x,y) = \dfrac{y - x}{1 + 2x}$.

**5.** Lösningen är

$$u(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\ln\big(x^2 + (y-1)^2\big) + \frac{1}{4\pi}\ln\big(x^2 + (y+1)^2\big) + \frac{1}{\pi}\arctan\Big(\frac{x+1}{y}\Big) - \frac{1}{\pi}\arctan\Big(\frac{x-1}{y}\Big)$$

för $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

**6.** Egenfrekvenserna är $\dfrac{ck}{2\pi}$ och svängningsmoderna $\dfrac{\sin(k(x-1))}{x}$ där $k = 1, 2, \ldots$