1. Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod på polynomen 1 och x ger en ortogonal bas för förstagradspolynom. Välj $p_0 = 1$ och

$$p_1(x) = x - \frac{(p_0 \mid x)}{\|p_0\|^2} p_0 = x - \frac{\int_0^1 x \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x} 1 = x - \frac{1/2}{1} = x - \frac{1}{2}.$$

Det polynom som minimerar integralen i uppgiften kan nu beräknas med hjälp av projektionssatsen som

$$\frac{(p_0 \mid \cos(\pi x))}{\|p_0\|^2} p_0 + \frac{(p_1 \mid \cos(\pi x))}{\|p_1\|^2} p_1 = \frac{\int_0^1 \cos(\pi x) \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x} 1 + \frac{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \cos(\pi x) \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0 \cdot 1 + \frac{\int_0^1 x \cos(\pi x) \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} \, \mathrm{d}x} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{2/\pi^2}{1/12} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{24}{\pi^2} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{12}{\pi^2} (1 - 2x).$$

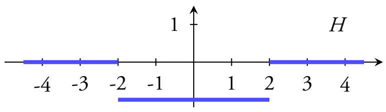
2. En matematisk modell blir

$$\begin{cases} u''_{tt} - \frac{1}{4} u''_{xx} = 0, & x > 0, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x, 0) = \delta_2(x), & x > 0. \end{cases}$$

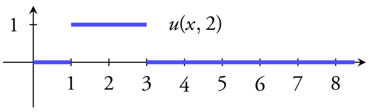
Låt u vara den udda speglingen av u med avseende på x. Då gäller att

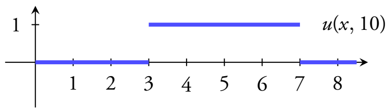
$$\begin{cases} u''_{tt} - \frac{1}{4} u''_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u'_t(x, 0) = \delta_2(x) - \delta_{-2}(x) = h(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Med $H(x) = \theta(x - 2) - \theta(x + 2)$, en primitiv till h så ger d'Alemberts formel att lösningen kan skrivas $u(x, t) = \frac{1}{2\frac{1}{2}} H(x + t/2) - H(x - t/2)$.



Lösningen är $u(x, t) = \theta(x + t/2 - 2) - \theta(x + t/2 + 2) + \theta(x - t/2 + 2) - \theta(x - 2/t - 2)$ då $x > 0$ och $t > 0$ vilket ger följande figurer





3. Den karakteristiska kurvan löser systemet

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 2x, & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = y, & z(0) = \frac{1}{1+y_0^2}. \end{cases}$$

Första ekvationen har lösningen $x(t) = t$ vilket insatt i den andra ger ekvationen $\dot{y}(t) = 2t$, $y(0) = y_0$ som har lösningen $y(t) = t^2 + y_0$. Sätter man in detta i den tredje ekvationen blir den $\dot{z}(t) = t^2 + y_0$, $z(0) = \frac{1}{1+y_0^2}$ och har då lösningen $z(t) = \frac{1}{3} t^3 + y_0 t + \frac{1}{1+y_0^2}$. Återstår att från uttrycken för x och y lösa ut t och y_0 det vill säga

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 + y_0, \end{cases} \iff \begin{cases} t = x, \\ y_0 = y - x^2, \end{cases}$$

vilket insatt i uttrycket för $z(t)$ ger u.

Svar: Lösningen är $u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 + (y - x^2) x + \frac{1}{1+(y-x^2)^2} = xy - \dfrac{2}{3} x^3 + \dfrac{1}{1 + (y - x^2)^2}$.

4. Eftersom det är homogent neumannvillkor utvidga u jämnt kring $x = 0$ till u vilket ger problemet

$$\begin{cases} u'_t - D\,u''_{xx} = -k\,u, \\ u(x,0) = m\,\delta(x-1) + m\,\delta(x+1). \end{cases}$$

Låt $\hat{u}(\xi, t)$ vara den partiella fouriertransformen i x-led av $u(x,t)$. Fouriertransformation i x-led av differentialekvationen ger

$$\hat{u}'_t - D(\mathrm{i}\xi)^2\hat{u} = -k\hat{u}$$

som kan skrivas

$$\hat{u}'_t + (D\xi^2 + k)\hat{u} = 0$$

med lösningen

$$\hat{u}(\xi,t) = c(\xi)\,\mathrm{e}^{-(D\xi^2+k)t}\,.$$

Här ges $c(\xi)$ av begynnelsevärdet $\hat{u}(\xi,0) = m\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} + m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}$. Således är

$$\hat{u}(\xi,t) = m\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\,\mathrm{e}^{-D\xi^2 t} + m\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\,\mathrm{e}^{-D\xi^2 t}\,.$$

Inverstransformation ger nu u.

Svar: Lösningen är $u(x,t) = \dfrac{m\,\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{4\pi D t}}\left(\mathrm{e}^{-(x-1)^2/(4Dt)} + \mathrm{e}^{-(x+1)^2/(4Dt)}\right)$ för $x > 0$, $t > 0$.

Ett förslag på fysikalsik modell: Ett långt och smalt vattenfyllt rör sträcker sig längs positiva x-axeln. Röret är slutet vid $x = 0$. Vid tiden $t = 0$ brister en ampull vid $x = 1$ och massan m av ett radioaktivt ämne börjar diffundera ut i vattnet samtidigt som det sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen. Diffusionskonstanten är D. Sök koncentrationen av det diffunderande ämnet.

5. Homogenisera först problemet genom att sätta $u = 1 + v$ där v uppfyller

$$\begin{cases} -\Delta v = \delta_{(0,1)}, & \text{i } \Omega, \\ v = 0, & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Genom spegling i x-axeln blir området cirkeln $\Omega' = \{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 < 2\}$ och om v uppfyller

$$\begin{cases} -\Delta v = \delta_{(0,1)} - \delta_{(0,-1)}, & \text{i } \Omega', \\ v = 0, & \text{på } \partial\Omega'. \end{cases}$$

så uppfyller v automatiskt problemet på Ω. Lösningen till problemet på Ω' kan konstrueras med fundamentallösningen $-\frac{1}{2\pi}\ln|(x,y)|$ i $\mathbb{R}^2$ och konjugerade punkter och linjariteten gör att man kan göra det för en diracfunktion i taget. Cirkelns radie är $r = \sqrt{2}$ och punkterna $(0,1)$ och $(0,2)$ är då konjugerade punkter med avseende på den givna cirkeln och faktorn som behövs är $1/\sqrt{2}$ vilket ger

$$-\frac{1}{2\pi}\left(\ln\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \ln\sqrt{x^2 + (y-2)^2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{x^2 + (y-2)^2}{2(x^2 + (y-1)^2)}.$$

den andra diracfunktionen ger samma uttryck fast med plustecken efter y. Subtraherar man dessa och lägger till 1 får man u.

Svar: Lösningen är $u(x,y) = 1 + \dfrac{1}{4\pi}\ln\dfrac{\left(x^2 + (y+1)^2\right)\left(x^2 + (y-2)^2\right)}{\left(x^2 + (y-1)^2\right)\left(x^2 + (y+2)^2\right)}.$

6. Beteckna rummets längd, bredd och höjd med L, B och H. Då blir ekvationen för ljudvågorna

$$u''_{tt} + c^2 \mathcal{A} u = 0, \qquad \text{med } \mathcal{A} = -\Delta,$$

och med randvärdena $u' = 0$ på alla väggar utom en där $u = 0$. Egenvärdena λ till $\mathcal{A}$ ger egenfrekvenserna $f = \frac{c\sqrt{\lambda}}{2\pi}$. För att hitta egenvärdena λ som gör vi variabelseparation av en egenfunktion $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Då får vi ekvationerna, i y-led,

$$Y'' + \lambda_y Y = 0, \qquad Y'(0) = Y'(B) = 0,$$

med egenfunktionen $Y(y) = \cos\left(\frac{j\pi y}{B}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ och i z-led

$$Z'' + \lambda_z Z = 0, \qquad Z'(0) = Z'(H) = 0,$$

med egenfunktionen $Z(z) = \cos\left(\frac{k\pi z}{H}\right)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ och slutligen x-led

$$X'' + \lambda_x X = 0, \qquad X'(0) = 0,\ X(L) = 0,$$

med egenfunktionen $X(x) = \cos\left(\frac{(j+1/2)\pi x}{L}\right)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Sammantaget blir egenfunktionerna

$$\varphi_{jkl}(x, y, z) = \cos\left(\frac{(j + 1/2)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{B}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{H}\right)$$

och egenvärdena

$$\lambda_{jkl} = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = \left(\frac{(j + 1/2)\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{B}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{H}\right)^2$$

vilket ger egenfrekvenserna

$$f_{jkl} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda_{jkl}} = 170\sqrt{\left(\frac{j + 1/2}{L}\right)^2 + \left(\frac{k}{B}\right)^2 + \left(\frac{l}{H}\right)^2}, \quad j, k, l = 0, 1, 2, \ldots$$

Grundfrekvensen, den lägsta frekvensen, är $f_{000} = 170/(2L) = 21{,}25$ vilket ger $L = 4$. Då blir $f_{100} = 63{,}75$ och $f_{j00} > 63{,}75$ för $j > 1$. Den näst lägsta frekvensen 30,05 måste vara f_{010} (eller f_{001}) vilket ger

$$30{,}05 = 170\sqrt{\left(\frac{1/2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{B}\right)^2}$$

varför $B = 8$. Då blir $f_{110} = 67{,}20$, $f_{020} = 47{,}52$, $f_{030} = 67{,}20$. Den återstående låga frekvensen 60,52 måste då vara f_{001} vilket ger $H = 3$.

Svar: Rummets dimensioner är $3\,\text{m} \times 4\,\text{m} \times 8\,\text{m}$.