LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2019-05-03

1. Lösningen är $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{erf}\Big(\dfrac{x}{\sqrt{4at}}\Big) - \mathrm{erf}\Big(\dfrac{x+1}{\sqrt{4at}}\Big) - \mathrm{erf}\Big(\dfrac{x-1}{\sqrt{4at}}\Big)\Big)$ då $x, t > 0$.

2. Eftersom $\mathcal{A}\,1 = 0 \cdot 1$, $\mathcal{A}\sin(x) = 2\sin(x)$ och $\mathcal{A}(3\sin^2(x) - 1) = 6(3\sin^2(x) - 1)$ är de givna funktionerna egenfunktioner till $\mathcal{A}$ med egenvärden 0, 2 respektive 6. I skalärprodukten $(u \mid v) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(x)v(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$ blir $(1 \mid \sin) = \ldots = 0$. Operatorn $\mathcal{A}$ är som singulär Sturm-Liouville positivt semidefinit men med ett egenvärde $= 0$ inte positivt definit.

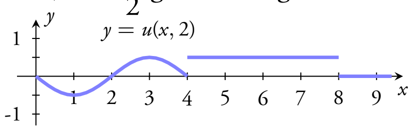
3. Temperaturen i isoleringen ges av $60 - 20\ln r/\ln 2$ för $1 < r < 4$, där r är avståndet till cylinderns mitt.

4. Modell

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x/2)(\theta(x) - \theta(x-2)), & x > 0, \\ u'_t(x,0) = \delta_6(x), & x > 0. \end{cases}$$

Om $g = \sin(\pi x/2)(\theta(x+2) - \theta(x-2))$ och $h = \delta_6(x) - \delta_{-6}(x)$ är den udda utvidgningen av $u(x,0)$ respektive $u'_t(x,0)$ så ger d'Alemberts formel att

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t)), \qquad x, t > 0.$$



5. Observera att med $a = -1$ blir skalningsregeln $(\sigma_{-1}U)(\varphi) \stackrel{s}{=} U(\sigma_{-1}\varphi)$. Precis som för en funktion sägs en distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vara jämn om $\sigma_{-1}U \stackrel{j}{=} U$. Eftersom definitionen av fouriertransformen av en tempererad distribution är $(\mathcal{F}U)(\varphi) \stackrel{\mathcal{F}}{=} U(\mathcal{F}\varphi)$ så blir för en jämn tempererad distribution U och en godtycklig testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\sigma_{-1}(\mathcal{F}U))(\varphi) &\stackrel{s}{=} (\mathcal{F}U)(\sigma_{-1}\varphi) \stackrel{\mathcal{F}}{=} U(\mathcal{F}(\sigma_{-1}\varphi)) \stackrel{(2)}{=} U(\sigma_{-1}(\mathcal{F}\varphi)) \\ &\stackrel{s}{=} (\sigma_{-1}U)(\mathcal{F}\varphi) \stackrel{j}{=} U(\mathcal{F}\varphi) \stackrel{\mathcal{F}}{=} (\mathcal{F}U)(\varphi) \end{aligned}$$

där tredje likheten är skalningsregel (2) för vanliga fouriertransformer. Detta visar att $\sigma_{-1}(\mathcal{F}U) = \mathcal{F}U$ och därmed är $\mathcal{F}U$ jämn.

Lösningen på faltningsekvationen är $U = \frac{e^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\cos(x)$.

6. Om Ω betecknar cylindern så blir en modell med $\mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} u'_t - a\,\Delta u = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x},t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x},0) = 20, & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

och lösningen blir i cylindriska koordinater $0 < r < R$, $0 < \varphi < 2\pi$ och $0 < z < h$

$$u(r,z,t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} c_{kn}\, e^{-a\lambda_{kn}t}\, J_0\Big(\alpha_{0n}\frac{r}{R}\Big)\sin\Big(\frac{k\pi z}{h}\Big), \quad c_{nk} = \frac{40(1-(-1)^k)\int_0^R J_0(\frac{\alpha_{0n}r}{R})r\,\mathrm{d}r}{k\pi\int_0^R J_0^2(\frac{\alpha_{0n}r}{R})r\,\mathrm{d}r}.$$