LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
KONTINUERLIGA SYSTEM
2018-08-24

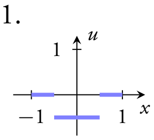
1. Systemet (A) är en vågekvation där d'Alembert ger $u_{\mathrm{A}}(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x+t) + g(x-t)\big)$ med $u_{\mathrm{A}}(2,4) = 0$.

Systemet (B) är Laplace ekvation (med variabler (x,t) istället för (x,y)) och Poissons integralformel ger $u_{\mathrm{B}}(x,t) = \frac{1}{\pi}\arctan\big(\frac{x-1}{t}\big) - \frac{1}{\pi}\arctan\big(\frac{x-2}{t}\big)$ med $u_{\mathrm{B}}(2,4) = \frac{1}{\pi}\arctan(1/4)$.

Slutligen systemet (C) är en värmeledningsekvation där faltning med greenfunktionen ger $u_{\mathrm{C}}(x,t) = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\big(\frac{x-1}{\sqrt{4t}}\big) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\big(\frac{x-2}{\sqrt{4t}}\big)$ med $u_{\mathrm{C}}(2,4) = \frac{1}{2}\operatorname{erf}(1/4)$.

2. En tolkning kan vara att modellen beskriver små transversella svängningar i en sträng med vågutbredningshastigheten 1 som är fastsatt i $(-1,0)$ och $(1,0)$. Strängen befinner sig vid tiden $t = 0$ längs x-axeln och får genom ett hammarslag i 0 en transversell hastighet $u'_t(x,0) = \delta(x)$.

Låt h vara den upprepat udda utvidgningen som blir 4-periodisk och kan skrivas $h(x) = \sum(-1)^k\,\delta_{2k}(x)$ och låt H vara den primitiva funktion till h för vilken $H(-1) = 0$. Enligt d'Alemberts formel är nu $u(x,t) = \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t))$ då $-1 < x < 1$. Speciellt blir $u(x,2{,}5) = -\frac{1}{2}(\theta(x+0{,}5) - \theta(x-0{,}5))$ då $-1 < x < 1$ med hopp i $-0{,}5$ och $0{,}5$. (Lösningen kan även skrivas på serieform.)



3. En modell är

$$\begin{cases} u'_t - D\,u''_{xx} = -k\,u, & x > 0,\ t > 0,\\ u'_x(0,t) = 0, & t > 0,\\ u(x,0) = m\,\delta_1(x), & x > 0,\end{cases}$$

där D är diffusionskonstanten, k sönderfallskonstanten och m massan.

Efter jämn utvidgning kan problemet fouriertransformeras i x-led vilket ger lösningen $u(x,t) = \dfrac{m\,\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{4\pi D t}}\big(\mathrm{e}^{-(x-1)^2/(4Dt)} + \mathrm{e}^{-(x+1)^2/(4Dt)}\big)$ för $x > 0$, $t > 0$.

4. U består av tredjegradspolynom utan konstant koefficient och de är en delmängd av det linjära rummet $\mathrm{L}_2([-1,1])$. Låt u och v vara polynom i U. Då är både λu där λ är en skalär och $u + v$ högst tredjegradspolynom vars konstanta koefficienter är 0 och de ligger därmed i U.

En icke-ortogonal bas i U är x, x^2, x^3. Gram-Schmidtortogonalisering på denna ger den ortogonala basen $x, x^2, x^3 - \frac{3}{5}x$ och projektionssatsen ger att $\frac{5}{3}x^2$ minimerar integralen.

5. Polära koordinater och variabelseparation ger lösningen $u(r,\theta) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{J}_2(2)}\,\mathrm{J}_2(2r)\sin(2\theta)$.

6. Lägg ett koordinatsystem med origo i klotets medelpunkt och x- och y-axlarna i vätskeytan. Inför sen rymdpolära koordinater. Eftersom begynnelsevärdena och randvärdena är oberoende av φ så kommer lösningen att bli oberoende av φ. Om $v = u - 35$ så kan ekvationen för den stationära lösningen skrivas $\Delta v = 0$ med randvärden $v(1,\theta) = -15\operatorname{sgn}(\cos\theta)$ där sgn är signumfunktionen. Lösningen är

$$u(r,\varphi,\theta) = 35 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k\,\mathrm{P}_k(\cos\theta), \quad \text{med} \quad a_k = -15\,\frac{\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(s)\,\mathrm{P}_k(s)\,\mathrm{d}s}{\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(s)^2\,\mathrm{d}s}$$

där P_k Legendrepolynomen. Observera att $a_k = 0$ då k är jämnt heltal på grund av att $\operatorname{sgn}(s)\,\mathrm{P}_k(s)$ då är en udda funktion.