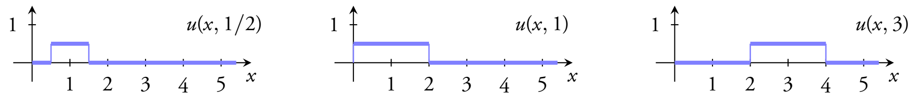
**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**LÖSNINGAR**
**KONTINUERLIGA SYSTEM**
**2018-05-28**

**1.** Till exempel kan $u$ vara utböjningen av en mycket lång (halvoändlig) elastisk sträng med vågutbredningshastighet 1 som är fast inspänd i änden ($x = 0$) och som ej påverkas av några yttre krafter. Vid tiden 0 är strängen i jämnviktläget och ges med ett slag underifrån i $x = 1$ av en spetsig hammare.

Utvidga problemet till hela $\mathbb{R}$ genom att spegla udda och sätt $h(x) = \delta(x-1) - \delta(x+1)$. Om $H(x) = -\theta(x+1) + \theta(x-1)$ är en primitiv funktion till $h$ så kan lösningen skrivas $u(x,t) = (H(x+t) - H(x-t))/2$ för $t, x > 0$.




**2.** En modell är

$$\begin{cases} u'_t - D\,u''_{xx} = -\alpha\, u, & 0 < x < L, t > 0, \\ u'_x(0,t) = u'_x(L,t) = 0\ , & t > 0, \\ u(x,0) = M\,\delta(x - L/2), & 0 < x < L, \end{cases}$$

där $D > 0$ är diffusionskonstanten och $\alpha > 0$ sönderfallskonstanten. Eftersom det är homogena neumannvillkor kan man ansätta

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos(k\pi x/L)\ .$$

Efter termvis derivation och insättning i differentialekvationen får man

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(u'_k(t) + \frac{Dk^2\pi^2}{L^2}u_k(t)\Big)\cos(k\pi x/L) = -\alpha\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos(k\pi x/L)$$

vilket med hjälp av entydigheten hos ortogonalutvecklingen ger

$$u'_k(t) + \Big(\alpha + \frac{Dk^2\pi^2}{L^2}\Big)u_k(t) = 0$$

med lösningen

$$u_k(t) = c_k\,\mathrm{e}^{-(\alpha + Dk^2\pi^2/L^2)t}\ ,\quad k = 0, 1, \ldots,$$

där $c_k = u_k(0)$ ges av utvecklingen av $M\,\delta_{L/2}$ i cosinusserie

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L M\,\delta(x - L/2)\,\mathrm{d}x = \frac{M}{L},$$
$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L M\,\delta(x - L/2)\cos(k\pi x/L)\,\mathrm{d}x = \frac{2M}{L}\cos(k\pi/2).$$

Alltså är lösningen

$$u(x,t) = \frac{M}{L}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{2M}{L}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\pi/2)\,\mathrm{e}^{-Dk^2\pi^2 t/L^2}\ \cos(k\pi x/L).$$

**3.** Legendrepolynomen $P_n$ är ortogonala i $L_2([-1,1])$. Det tredjegradspolynom $p$ som bäst approximerar sgn i $L_2$-norm på intervallet $[-1,1]$ kan skrivas

$$p(x) = \frac{(P_0 \mid \mathrm{sgn})}{\|P_0\|^2}\, P_0 + \frac{(P_1 \mid \mathrm{sgn})}{\|P_1\|^2}\, P_1 + \frac{(P_2 \mid \mathrm{sgn})}{\|P_2\|^2}\, P_2 + \frac{(P_3 \mid \mathrm{sgn})}{\|P_3\|^2}\, P_3 \,.$$

Legendrepolynomen bestäms enklast med rekursionsformeln på formelbladet. Man får

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

(Alternativt kan man ortogonalisera $1, x, x^2, x^3$ med Gram-Schmidts metod.) Observera att $P_0$ och $P_2$ är jämna funktioner, att $P_1$, $P_3$ och sgn är udda samt att integrationsintervallet $[-1,1]$ är symmetriskt vilket snabbt ger att $(P_0 \mid \mathrm{sgn}) = (P_2 \mid \mathrm{sgn}) = 0$. Dessutom är produkterna $P_1$ sgn, $P_3$ sgn samt $P_1^2$ och $P_3^2$ jämna vilket ger

$$\|P_1\|^2 = 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \qquad \|P_3\|^2 = 2\int_0^1 \Big(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\Big)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{7},$$
$$(P_1 \mid \mathrm{sgn}) = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1, \qquad (P_3 \mid \mathrm{sgn}) = 2\int_0^1 \Big(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}\Big)x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}.$$

Insatt i uttrycket för $p$ ovan ger detta $p(x) = \frac{1}{2/3}\cdot x - \frac{1/4}{2/7}\cdot\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{5}{16}(-7x^3 + 9x)$.

**4.** Starta med att homogenisera randvillkoret, sätt $v(x,t) = u(x,t) - T_0$. Då är

$$v(0,t) = 0,\ t > 0, \quad \text{och} \quad v(x,0) = T_1 - T_0\,,\ x > 0.$$

Vi har nu ett homogent dirichletvillkor vid $x = 0$ och speglar udda. För $w$ gäller

$$\begin{cases} w'_t - a\,w''_{xx} = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0, \\ w(x,0) = g(x) = (T_1 - T_0)\,\mathrm{sgn}(x). \end{cases}$$

Lösningen $w(x,t)$ kan skrivas med greenfunktionen $G$ för värmeledning som

$$\begin{aligned} w(x,t) = G * g(x,t) &= \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{4\pi a t}}\Big(-\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2/4at}\,\mathrm{d}\alpha + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2/4at}\,\mathrm{d}\alpha\Big) \\ &= \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_{\infty}^{x/\sqrt{4at}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y - \int_{x/\sqrt{4at}}^{-\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big) \\ &= \frac{T_1 - T_0}{2}\Big(\big[\mathrm{erf}(y)\big]_{\infty}^{x/\sqrt{4at}} - \big[\mathrm{erf}(y)\big]_{x/\sqrt{4at}}^{-\infty}\Big) = (T_1 - T_0)\,\mathrm{erf}(x/\sqrt{4at}) \end{aligned}$$

Alltså är $u(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)\,\mathrm{erf}(x/\sqrt{4at})$, $x > 0$, $t > 0$.

Problemet kan beskriva värmeledning i en lång (halvoändlig) stav som är isolerad utom i ändpunkten ($x = 0$). Från början ($t = 0$) har hela staven temperaturen $u = T_1$. Vid starttiden ges ändpunkten temperaturen $T_0$ och hålls därefter vid denna temperatur. Värmediffusiviteten är $a$.

**5.** Randvillkoren är oberoende av longituden $\varphi$, vilket därför också gäller för lösningen. Denna kan alltså skrivas $u = u(r,\theta)$. Sätt $s = \cos(\theta)$. Laplaces ekvation är

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial s}((1-s^2)\frac{\partial u}{\partial s}) = 0.$$

Sök först lösningar av typ $u(r,s) = R(r)S(s)$. Differentialekvationen ger

$$(r^2R')'S + R((1-s^2)S')' = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{(r^2R')'}{R} = -\frac{((1-s^2)S')'}{S} = \lambda.$$

I $s$-led har man ett Sturm-Liouvilleproblem

$$\begin{cases} -((1-s^2)S')' = \lambda S\,, & -1 < s < 1, \\ S \text{ begränsad,} & \end{cases}$$

som har lösningarna

$$\begin{cases} \lambda_\ell = \ell(\ell+1)\,, & \ell = 0,1,\dots, \\ S_\ell(s) = \mathrm{P}_\ell(s), & \text{Legendrepolynom.} \end{cases}$$

I $r$-led får man ekvationen

$$r^2R'' + 2rR' - \ell(\ell+1)R = 0$$

med lösningarna

$$R(r) = a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-\ell-1}\,, \quad \ell = 0,1,\dots$$

Lösningen på problemet kan alltså skrivas

$$u(r,s) = \sum_0^\infty (a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-\ell-1})\,\mathrm{P}_\ell(s)$$

där $a_\ell$ och $b_\ell$ bestäms av randvillkoren

$$\begin{aligned} 5s &= u(1,s) = \textstyle\sum_0^\infty (a_\ell + b_\ell)\,\mathrm{P}_\ell(s), \\ 3s &= u(2,s) = \textstyle\sum_0^\infty (a_\ell 2^\ell - b_\ell 2^{-\ell-1})\,\mathrm{P}_\ell(s). \end{aligned}$$

Eftersom $\mathrm{P}_1(s) = s$ så följer att $a_k = b_k = 0,\ k \neq 1$, och

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 5, \\ 2a_1 + \frac{1}{4}b_1 = 3, \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} a_1 = 1, \\ b_1 = 4, \end{cases}$$

varför den sökta lösningen kan skrivas $u(r,\theta,\varphi) = \left(r + \dfrac{4}{r^2}\right)\cos(\theta)$.

**6.** Vi bestämmer egenvärdena $\lambda$ för $-\Delta$ med dirichletvillkor i de öppna ändarna och neumannvillkor i plåten. Egenfrekvenserna fås då som $f = \dfrac{c}{2\pi}\sqrt{\lambda}$. Variabelseparation i cylinderkoordinater med $u(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ ger

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0.$$

Här har $\Theta$-delen de $2\pi$-periodiska lösningarna $\cos(k\theta)$ och $\sin(k\theta)$ för heltal $k = 0, 1, \ldots$ Vidare har $Z$-delen med dirichletvillkor lösningarna $Z(z) = \sin\left(j\frac{\pi}{L}z\right)$ för $j = 1, 2, \ldots$ Slutligen blir $R$-delen

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda - \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 - \frac{k^2}{r^2}\right)R = 0$$

med begränsade lösningarna $\mathrm{J}_k(r\sqrt{\lambda - (j\pi/L)^2})$. På grund av neumannvillkoren vid plåten får vi $R\sqrt{\lambda - (j\pi/L)^2} = \alpha'_{kl}$ där $l = 1, 2, \ldots$ är löpnummer på nollställena till $\mathrm{J}'_k$. Egenfrekvenserna blir alltså

$$f_{jkl} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\alpha'_{kl}}{R}\right)^2}, \qquad j, l = 1, 2, \ldots, \ k = 0, 1, \ldots$$

I den endimensionella modellen antar vi att svängningarna bara sker i $z$-led, alltså att $r$- och $\theta$-beroendet är försumbart. Egenfrekvenserna i denna modell är

$$f_j = \frac{c}{2\pi}\frac{j\pi}{L} = \frac{cj}{2L}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Studera nu egenfrekvenserna i den tredimensionella modellen med hjälp av tabellen i formelbladet. Samma frekvenser som i endimensionella fallet fås för $\alpha'_{01} = 0$. Lägsta frekvensen bland de övriga fås för $\alpha'_{11} = 1{,}841$ och $j = 1$. Kravet är att denna skall vara högre än $f_1, f_2$ och $f_3$. Detta leder till villkoret

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\alpha'_{11}}{R}\right)^2 > \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 \iff \frac{R}{L} < \frac{\alpha'_{11}}{\pi\sqrt{8}} \approx 0{,}2.$$