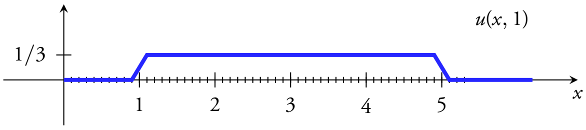
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **SVAR**
MATEMATIK **KONTINUERLIGA SYSTEM**
2018-04-13

1. Modell

$$\begin{cases} u''_t - 9\,u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x,0) = h(x), & x > 0. \end{cases}$$

Udda spegling och d'Alembert ger lösning som för $t = 1$ har graf



2. Lösningen fås direkt med Poissons integralformel.

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + (x-\alpha)^2)}\, u(\alpha, 0)\, \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi} \arctan\Big(\frac{x+1}{y}\Big) - \frac{1}{\pi}\arctan\Big(\frac{x-1}{y}\Big).$$

3. Operatorn skriven på Sturm-Liouvilleformen är $\mathcal{A}\,u = -\frac{1}{e^{6x}}(e^{6x}\,u')'$ med den tillhörande skalärprodukten $(u \,|\, v) = \int_0^L \overline{u(x)}v(x)\,e^{6x}\,\mathrm{d}x$. Egenvärden $\lambda_k = 9 + \big(\frac{k\pi}{L}\big)^2$ och motsvarande egenfunktioner $\varphi_k(x) = e^{-3x}\sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)$, $k = 1, 2, \ldots$.

4. Om C är koncentrationen av föroreningen vid ytan blir modellen

$$\begin{cases} u'_t - D\,u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = C, & u \text{ begränsad}, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Homogenisering av randvärdet och udda spegling ger ett problem vars lösning kan skrivas som faltning mellan $-C\,\mathrm{sgn}(x)$ med greenfuktionen G och slutliga svaret blir $u(x,t) = C\big(1 - \mathrm{erf}\big(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\big)\big)$.

5. Egenfrekvenserna är $f_k = \frac{c}{2\pi}\frac{\alpha_{0k}}{L}$, $k = 1, 2, \ldots$ vilket ger villkoret $L = \frac{340}{440}\frac{\alpha_{0k}}{2\pi}$. De två lägsta nollställena till J_0 svarar mot längderna $L = 0{,}296$ m respektive $L = 0{,}679$ m.

6. Varje källa ger lika stort bidrag till temperaturen u i origo. Temperaturen v från en källa i punkten α uppfyller värmeledningsekvationen $-\Delta v = \frac{C}{\lambda}\delta_\alpha$, $v = 0$ på klotytan. Efter udda spegling i randen blir $v(x) = \frac{C}{\lambda}\big(K(x-\alpha) - K\big(\frac{|\alpha|}{R}(x - \tilde{\alpha})\big)\big)$. I origo är $u(0) = 8\,v(0) = \frac{C}{\pi\lambda}\big(\frac{4}{\sqrt{3}} - 1\big)$ där C är källornas styrka och λ är värmeledningsförmågan.