LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM
2020-05-30, kl 8 - 13

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare.
FÖRBJUDET: Kontakt med andra personer (även via frågeforum), användning av internet, böcker och anteckningar samt datorer och mobiler för beräkningar.
Motivera lösningarna väl.

1. En halvoändlig, elastisk sträng längs positiva x-axeln är fast inspänd i $x = 0$. Från början är strängen rak men ges med en flat hammare vid tiden $t = 0$ den transversella hastigheten

$$h(x) = \theta(x-2) - \theta(x-3).$$

Anta att vågutbredningshastigheten i strängen är 1. Ställ upp en matematisk modell för strängens transversella utböjning och rita strängen då $t = 2$. Rita också utböjningen i $x = 1$ som en funktion av tiden.

2. Är funktionerna e^{-x} och e^{-2x} ortogonala i skalärprodukten

$$(u \mid v) = \int_0^\infty u(x)v(x)\, e^{-x}\, dx\,?$$

Bestäm de reella talen a och b så att integralen

$$\int_0^\infty \left(1 - a\, e^{-x} - b\, e^{-2x}\right)^2 e^{-x}\, dx$$

blir så liten som möjligt.

3. Lös för $x \in \mathbb{R}$ och $y > 0$ problemet

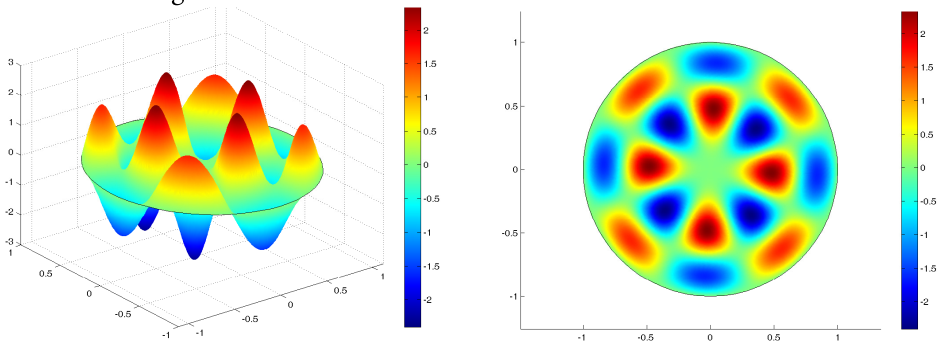
$$\begin{cases} x\, u'_x + y\, u'_y = -y\, u, \\ u(x,1) = x^2. \end{cases}$$

4. Ett långt och smalt vattenfyllt rör sträcker sig längs positiva x-axeln. Röret är slutet vid $x = 0$. Vid tiden $t = 0$ brister en ampull vid $x = 1$ och massan m av ett ämne börjar diffundera ut i vattnet. Diffusionskonstanten är D. Bestäm koncentrationen av det diffunderande ämnet. Vilken är den högsta koncentrationen vid den slutna änden?

5. Ett glasspaket med måtten 15 cm × 9 cm × 5 cm har legat länge i -18° C i en frys. När paketet läggs i rumstemperatur 20° C tar det 1 timme innan temperaturen i centrum stigit till -1° C. Vilket värde på värmediffusiviteten a ger detta om man bara räknar med den första termen i egenfunktionsutvecklingen för temperaturen? För enkelhets skull antar vi att alla paketets sidytor håller rumstemperatur hela tiden.

Vänd!

6. Betrakta operatorn $\mathscr{A} = -\Delta$ med $D_{\mathscr{A}} = \{\, u \in C^2(\Omega)\,;\; u = 0 \text{ på } \partial\Omega \,\}$, där Ω är enhetscirkelskivan. I figurerna nedan visas en egenfunktion till $\mathscr{A}$. Ange ett numeriskt värde på motsvarande egenvärde.



Hur många linjärt oberoende egenfunktioner finns det till detta egenvärde? Beskriv den/dem. Beteckna egenfunktionen i figurerna med φ. Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2\,\Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1,\ t > 0, \\ u(x,y,t) = 0, & x^2 + y^2 = 1,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & x^2 + y^2 < 1, \\ u'_t(x,y,0) = 0, & x^2 + y^2 < 1\,. \end{cases}$$

Funktionen φ får ingå i svaret.

TREVLIG SOMMAR!