

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling, miniräknare, pappersböcker och anteckningar på papper.
FÖRBJUDET: Kontakt med andra personer (även via frågeforum), användning av internet, elektroniska böcker och elektroniska anteckningar och datorer och mobiler för beräkningar.
Motivera lösningarna väl.

1. Finn en lösning till värmeledningsproblemet

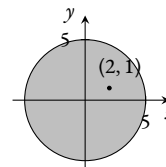
$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = -3u, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Bestäm det tredjegradspolynom som bäst approximerar funktionen $|x|$ på intervallet $[-1, 1]$ i L_2 normen $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.
3. En halvoändlig, elastisk sträng längs positiva x -axeln är fast inspänd i $x = 0$ och har vågutbredningshastighet 2. Vid tiden $t = 0$ är strängen i vila och har formen

$$g(x) = 4(1 - |x - 4|)(\theta(x - 3) - \theta(x - 5)).$$

Ställ upp en matematisk modell för strängens transversella utböjning, lös problemet och rita strängen då $t = 6$. Rita även strängen då $t = 6$ om strängen modifieras till att vara fast inspänd i både $x = 0$ och $x = 10$ men med samma vågutbredningshastighet och begynnelsevillkor.

4. En lång cylindrisk kropp har radien 5 m. Inuti, parallellt med dess axel löper ett värmerör som avger värmemängden 60 W/m . Värmekällan uppfattas som punktförmig, belägen i $(2, 1)$. Temperaturen på cylinderytan är hela tiden 20°C . Bestäm temperaturen i origo efter mycket lång tid om värmediffusiviteten är $a = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ och värmeledningsförmågan $\lambda = 0,3 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$.



5. Translation med b kan för en testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ skrivas $(\tau_b \varphi)(x) = \varphi(x - b)$. För en distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definieras translation genom $(\tau_b U)(\varphi) = U(\tau_{-b} \varphi)$. Hur fouriertransformen $\widehat{\tau_b \varphi}$ kan förenklas ges av formelbladet. Formulera och bevisa motsvarande räkneregler för en tempererad distribution $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Slutligen bestäm alla tempererade distributioner $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ som löser ekvationen

$$(U * g)(x) = \sin(2x) \quad \text{där} \quad g(x) = e^{-|x|}.$$

6. Beräkna egenfrekvenser och svängningsmoder för ett fast inspänt kvadratisk membran. Beräkna de tre lägsta egenfrekvenserna och motsvarande svängningsmoder för ett fast inspänt triangulärt membran i form av en halv kvadrat.

LYCKA TILL!