LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM
2019–08–23, kl 14–19

HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling och miniräknare.
Motivera lösningarna väl.

1. En halvoändlig, tunn stav är värmeisolerad längs mantelytan. Stavens ändyta hålls vid temperaturen 20° C och stavens begynnelsetemperatur är 0° C. Lös värmeledningsproblemet.

2. Visa att

$$U = \{\, p\,;\, p \text{ är polynom med grad}\, p \leqslant 3 \text{ och } p'(0) = 0 \,\}$$

är ett linjärt underrum i $L_2([-1,1])$. Ange dimensionen av U och bestäm en ortogonal bas. Är

$$(p \mid q) = \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)\,\mathrm{d}x$$

en alternativ skalärprodukt på U?

3. Ett cirkulärt inspänt membran med radie 1 släpps vid tiden $t = 0$ utan begynnelsehastighet från läget $u(r,\theta) = J_0(\alpha_{02}r)$ där α_{02} är ett besselnollställe. Lös svängningsproblemet.

4. Lös för $x \geqslant 0$ och $y \in \mathbb{R}$ problemet

$$\begin{cases} u'_x + (1+2u)u'_y = 0, \\ u(0,y) = y. \end{cases}$$

5. Finn en lösning till det tvådimensionella potentialproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(0,1)}, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. För svängningar i smala rör med variabel tvärsnittsarea $A(x)$ kan man visa att vågekvationen har formen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{A(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Betrakta ett rör i form av en stympad kon där $A(x) = x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 1 + \pi$. Rörets ändar är öppna. Bestäm rörets egenfrekvenser och svängningsmoder.

LYCKA TILL!