LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM
2019-05-03, kl 14 - 19

HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling och miniräknare.
Motivera lösningarna väl.

1. Finn en begränsad lösning på diffusionsproblemet

$$\begin{cases} u_t' - a\,u_{xx}'' = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 - \theta(x-1), & x > 0. \end{cases}$$

där diffusionskonstanten a är positiv.

2. Operatorn $\mathcal{A}$ definieras av

$$\mathcal{A}\,u = -\frac{1}{\cos(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\cos(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big), \quad \mathrm{D}_{\mathcal{A}} = \{u \in \mathrm{C}^2\big(\big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\big)\;;\; u \text{ och } u' \text{ begränsade}\}.$$

Visa att funktionerna 1, $\sin(x)$ och $3\sin^2(x) - 1$ är egenfunktioner till $\mathcal{A}$ och bestäm motsvarande egenvärden. Kontrollera också att de två första är vinkelräta i en lämplig skalärprodukt. Är $\mathcal{A}$ positivt definit?

3. Ett långt, smalt vattenrör med radien 1 cm genomströmmas av vatten med konstant temperatur 60° C. Röret omges av ett 3 cm tjockt lager isolering. Utanför isoleringen är rumstemperaturen 20° C. Bestäm temperaturen i isoleringen efter lång tid. Bortse från övergångsmotstånd.

4. En halvoändlig elastisk sträng är fast inspänd i änden $x = 0$ och har vid tiden $t = 0$ formen $\sin(\pi x/2)(\theta(x) - \theta(x-2))$. Vid tiden $t = 0$ träffas strängen av ett hammarslag och får den transversella hastigheten $h(x) = \delta_6(x)$. Vågutbredningshastigheten i strängen antas vara 1. Ställ upp en modell för strängens transversella utböjning och bestäm utböjningen. Rita strängens utböjning vid tiden $t = 2$.

5. Skalning med faktorn a kan för en testfunktion $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ skrivas $(\sigma_a\varphi)(x) = \varphi(ax)$. För en distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definieras skalning genom $(\sigma_a U)(\varphi) = |a|^{-1}U(\sigma_{1/a}\varphi)$. Hur defineras att distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ är jämn? Visa att fouriertransformen av en jämn tempererad distribution är jämn. Slutligen bestäm alla tempererade distributioner $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ som löser ekvationen

$$(U * g)(x) = \cos(x) \qquad \text{där} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

6. En rät cirkulär homogen cylinder med radien R och höjden h har från början temperaturen konstant rumstemperatur 20° C. Vid tiden $t = 0$ sänks cylindern helt ner i en stor behållare som innehåller vatten och is med temperaturen 0° C. Ställ upp en modell för temperaturen i cylindern för $t > 0$ och lös problemet.

LYCKA TILL!