LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM
2018-08-24, kl 14 - 19

HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling och miniräknare.
Motivera lösningarna väl.

1. Låt $g(x) = \theta(x-1) - \theta(x-2)$ för $x \in \mathbb{R}$. Finn för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$ en begränsad lösning $u(x,t)$ till de tre systemen

$$\text{(A)} \begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \\ u(x,0) = g(x), \\ u'_t(x,0) = 0, \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} -u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \\ u(x,0) = g(x), \end{cases} \qquad \text{(C)} \begin{cases} u'_t - u''_{xx} = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Beräkna i samtliga fall $u(2,4)$.

2. Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & -1 < x < 1,\ t > 0, \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & -1 < x < 1, \\ u'_t(x,0) = \delta(x), & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Lös systemet och rita lösningen för $t = 2{,}5$.

3. Ett långt och smalt vattenfyllt rör sträcker sig längs positiva x-axeln. Röret är slutet vid $x = 0$. Vid tiden $t = 0$ brister en ampull vid $x = 1$ och massan m av ett radioaktivt ämne börjar diffundera ut i vattnet samtidigt som det sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen. Formulera en rimlig matematisk modell för koncentrationen av ämnet i röret för $t > 0$ samt lös problemet.

4. Visa att

$$U = \{p\,;\, p(x) = x\,q(x) \text{ där } q \text{ är polynom med grad } q \leqslant 2\}$$

är ett linjärt underrum i $L_2([-1,1])$. Bestäm en ortogonal bas i U och bestäm det polynom p i U som minimerar integralen

$$\int_{-1}^{1} (1 - p(x))^2 \, dx.$$

5. Lös problemet

$$\begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & x^2 + y^2 < 1, \\ u = xy, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

6. Ett homogent klot med radie 1 har konstant temperatur 20° C. Det rullar ner i en vätska där det ligger så att halva klotet hamnar ovanför vätskan. Vätskans temperatur är hela tiden 50° C medan luftens temperatur är 20° C. Beräkna den stationära temperaturfördelningen i klotet.

LYCKA TILL!