

*HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling och miniräknare.  
Motivera lösningarna väl.*

1. Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u'_t(x, 0) = \delta(x - 1), & x > 0. \end{cases}$$

Lös problemet och rita lösningen för  $t = 1/2$ ,  $t = 1$  och  $t = 3$ .

2. En smalt vätskefyllt rör med längden  $L$  har slutna ändar. Vid tiden  $t = 0$  injiceras massan  $M$  av ett radioaktivt ämne i rörets mittpunkt. Ämnet diffunderar ut i röret och sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen. Formulera en rimlig matematisk modell för koncentrationen av ämnet i röret samt lös problemet.
3. Bestäm det tredjegradspolynom som bäst approximerar funktionen  $\operatorname{sgn}(x)$  ( $= 2\theta(x) - 1$ ) på intervallet  $[-1, 1]$  i  $L_2$ -normen  $\|f\| = (\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ .

4. Lös problemet

$$\begin{cases} u'_t - a u''_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = T_0, & t > 0, \\ u(x, 0) = T_1, & x > 0. \end{cases}$$

Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet.

5. Lös det tredimensionella potentialproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, \\ u = 5 \cos(\theta), & r = 1, \\ u = 3 \cos(\theta), & r = 2. \end{cases}$$

(Här är  $(r, \theta, \varphi)$  formelbladets rymdpolära koordinater.)

6. En cirkulär cylinder av plåt har radie  $R$  och längd  $L$  och är öppen i bägge ändarna. Bestäm dess egenfrekvenser. Jämför dessa med egenfrekvenserna i en endimensionell modell där radien antas vara liten. Vad blir villkoret på radien och längden för att grundtonen och de två första övertonerna ska bli lika i den tre- respektive endimensionella modellen?

**LYCKA TILL!**