

HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling och miniräknare.

Motivera lösningarna väl.

1. En halvoändlig, elastisk sträng längs positiva x -axeln är fast inspänd i $x = 0$. Från början är strängen rak men ges med en hammare vid tiden $t = 0$ den transversella hastigheten

$$h(x) = 10(\theta(x - 1, 9) - \theta(x - 2, 1)).$$

Anta att vågutbredningshastigheten i strängen är 3. Ställ upp en matematisk modell för strängens transversella utböjning och rita strängen då $t = 1$.

2. Bestäm den begränsade funktion u som uppfyller

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad y > 0, \\ u(x, 0) = \theta(x + 1) - \theta(x - 1), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Skriv operatorn

$$\mathcal{A}u = -\frac{d^2u}{dx^2} - 6\frac{du}{dx}, \quad 0 < x < L, \quad \text{med } u(0) = u(L) = 0,$$

på Sturm-Liouvilleform och ange en skalärprodukt $(u | v)$ i vilken egenfunktionerna är ortogonala. Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenfunktioner.

4. En förorening täcker ett stort plant markområde. Föroreningen diffunderar ner i jorden. Jordlagret förutsätts vara djupt och ha samma sammansättning överallt. Den ursprungliga mängden förorening var från början samlad på ytan och var där så stor att den kan antas vara konstant hela tiden. Bestäm koncentrationen som funktion av djupet och tiden.
5. Ljudvågorna i ett horn med tvärsnittsarean $A(x)$ uppfyller ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Ett horn där arean $A(x) = bx$, $0 \leq x \leq L$ är öppet i änden $x = L$. Om ljudhastigheten c är 340 m/s, bestäm de längder L mellan 0 och 1 m sådana att tonen 440 Hz kan frambringas.

6. I ett homogent klot med radien 2 finns 8 punktformiga och lika starka värmekällor fördelade i hörnen på en kub med sidan 1. Klotet och kuben har samma medelpunkt. Klotets yta hålls vid temperaturen 0. Bestäm temperaturen i klotets medelpunkt efter lång tid.

LYCKA TILL!