SVAR **FMAF01–FUNKTIONSTEORI**

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **2019-08-23, 08:00–13:00**

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara, läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna, om möjligt, tydliga och enkla svar.

1. Bestäm följden (a_k) då $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ och

$$a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2} - 2(-1)^k \quad (k \geq 3).$$

Svar $a_k = \frac{1}{5}\left(\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]^k + \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]^k - 2(-1)^k\right)$

2. Beräkna

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{\cos z}\, dz$ b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z \cos z}\, dz$ c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \cos z}\, dz$

Svar

a) 0 b) $2\pi i$ c) 0

3. a) Bestäm fourierserien hörande till den 2π-periodiska funktionen f som i intervallet $[0, 2\pi)$ ges av $f(t) = e^t$.

b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

c) Finns det någon konstant c sådan att den trigonometriska fourierserien hörande till den 2π-periodiska funktionen g som i intervallet $[0, 2\pi)$ ges av $g(t) = e^t - ct$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$?

Svar

a) (Den trigonometriska) fourierserien blir

$$\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kt - k \sin kt}{1+k^2}\right).$$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2}\coth(\pi) - \frac{1}{2}$.

c) Ja, det finns. Välj c så att funktionen blir kontinuerlig. Använd sedan teori eller Weierstraß M-test.

4. a) Funktionen f är holomorf i ett område som innehåller $z = 0$. Dess derivator i $z = 0$ ges av

$$f^{(k)}(0) = \frac{(3k)!}{(2k)!} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Bestäm konvergensradien för funktionens Maclaurinserie.

b) Beräkna $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{3^k}$.

Svar

a) Konvergensradien blir (kvottestet är enklast) $4/27$.

b) $3/2$

5. Beräkna integralerna $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)x^3}{x^4+4}\,dx$ och $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)x^3}{x^4+4}\,dx$.

Svar 0 respektive $-\pi e^{-\pi}$.

6. Antag att f är holomorf i det öppna och sammanhängande området $\Omega \subset \mathbb{C}$. Måste f vara en konstant funktion om $\cos(f)$ är det?

Svar Ja.