LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2019–04–29 Svar och anvisningar

1. a) Sant b) Falskt (om det hade varit sant så hade både sin och cos varit begränsade)
c) Falskt (för $n = -1$) d) Sant (se sats 3.19) e) Falskt (t.ex. $f(z) = 1/z^2$)

2. a) Konvergent (jämför t.ex. med $\sum 1/k^2$)
b) Konvergent (enklast med kvottestet)
c) Konvergent (absolutkonvergent; obs att Leibniz test *inte* fungerar)
d) Konvergent (jämför t.ex. med $\sum 1/k^2$)
e) Divergent (termerna går inte mot 0).

3. Börja med att bestämma $a = 0$ och $b = -1$ ur begynnelsevärdena. Lös sedan rekursionsekvationen. Svar: $x_{100} = 50$.

4. Det är klart att $x^n \to 0$ för $0 \le x < 1$, så $f_n(x) \to 0$ för $0 \le x < 1$. Dessutom är $f_n(1) = 0$ för alla n, så gränsfunktionen blir $f(x) = 0$.

Vi beräknar

$$\|f_n - f\| = \max_{0 \le x \le 1} x^n(1-x) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0$$

då $n \to \infty$. (Den första faktorn går mot 0, den andra mot e^{-1}. Maximum av f_n på intervallet $[0, 1]$ antas i $x = n/(n+1)$.) Konvergensen är alltså likformig.

5. Integranden är jämn, så

$$\int_0^\infty \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2}\,dx,$$

vilken kan beräknas med samma metod som i exempel 10.12. Svar: $\dfrac{7\pi e^{-6}}{32}$.

6. Fourierserien blir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikt}.$$

Den efterfrågade summan kan bestämmas med Parsevals formel (enklast genom att skriva om integralen till en komplex kurvintegral). Svaret blir $\binom{2n}{n}$.