LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2018–11–01 kl 14–19

1. Funktionen u är realdelen av en holomorf funktion om och endast om den är harmonisk (eftersom definitionsmängden är enkelt sammanhängande), dvs.

$$\Delta u(x,y) = 2 + 2b.$$

Vi ser alltså att $b = -1$ och att a är ett godtyckligt reellt tal. Cauchy–Riemanns ekvationer ger

$$\begin{cases} v'_x = -u'_y = -ax + 2y \\ v'_y = u'_x = 2x + ay. \end{cases}$$

Integration av den första ekvationen visar att $v(x,y) = -\frac{1}{2}ax^2 + 2xy + \phi(y)$ för någon deriverbar funktion ϕ. Därmed är $v'_y = 2x + \phi'(y)$ och jämförelse med det andra uttrycket för v'_y visar att $\phi'(y) = ay$, och därmed att $\phi(y) = \frac{1}{2}ay^2 + c$ för någon (reell) konstant c. Vi får alltså

$$f(x+iy) = x^2 + axy - by^2 + i\Big(-\frac{1}{2}ax^2 + 2xy + \frac{1}{2}ay^2 + c\Big)$$

och med hjälp av identitetssatsen (sätt $x = z$ och $y = 0$ i uttrycket ovan):

$$f(z) = z^2 - \frac{ia}{2}z^2 + ic = \Big(1 - \frac{ia}{2}\Big)z^2 + ic.$$

2. a) $\left|\dfrac{(1-i)^5 \cdot (2+i)}{(1-3i)^3}\right| = \dfrac{|1-i|^5 \cdot |2+i|}{|1-3i|^3} = \dfrac{(\sqrt{2})^5 \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{10})^3} = \dfrac{2}{5}.$

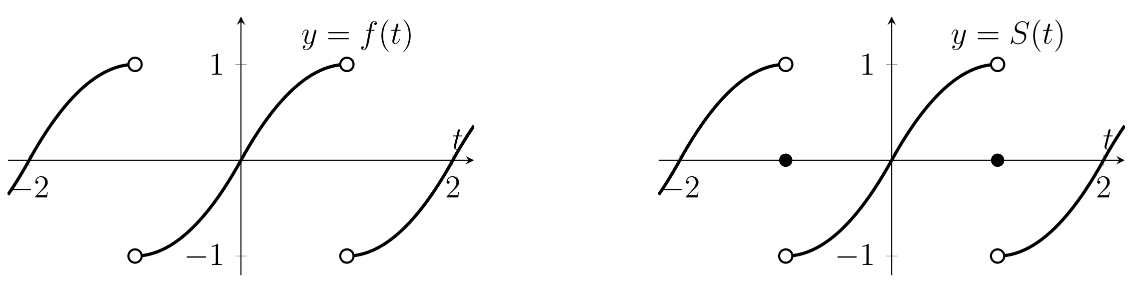
b) $\tan i = \dfrac{\sin i}{\cos i} = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{e^{-1} - e^{1}}{e^{-1} + e^{1}} = i\,\dfrac{e^2 - 1}{e^2 + 1}.$

c) $i^{-1/3} = e^{-\frac{1}{3}\log i} = e^{-\frac{1}{3}(\ln|i| + i\arg i)} = e^{-\frac{1}{3}(i\pi/2 + 2\pi i k)}$, så de tre möjliga värdena är $e^{-i\pi/6}$, $e^{i\pi/2}$ och $e^{7i\pi/6}$, dvs. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z = i$ samt $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

d) $\mathrm{Log}(e^{7i}) = (7 - 2\pi)i$. (Ett argument till e^{7i} är 7, men det är inte principalargumentet. För att få principalargumentet måste vi dra bort 2π för att hamna i intervallet $(-\pi, \pi)$.)

e) $e^{\mathrm{Log}\,7i} = 7i$ per definition. (Sant för varje val av logaritm.)

3.



a)

b) Funktionen f är L^1, styckvis kontinuerlig och styckvis deriverbar och uppfyller därmed villkoren i sats 7.18 i alla punkter (och villkoren i sats 7.16 i alla punkter utom $t = 2k+1$, för $k \in \mathbb{Z}$). Således är Fourierserien punktvis konvergent på hela $\mathbb{R}$ och summan blir

$$S(t) = \begin{cases} f(t), & t \neq 2k+1 \\ 0, & t = 2k. \end{cases}$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Eftersom S är diskontinuerlig, t.ex. i $t = 1$ men alla termer i Fourierserien är kontinuerliga, kan serien inte konvergera likformigt på hela $\mathbb{R}$.

c) Eftersom funktionen är udda blir $a_{2018} = 0$. Sats 7.16 (eller 7.18) visar att $S(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Dessutom gäller att

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k}{2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ udda}}}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k}{2} = [n = 2k-1] = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \cdot (-1)^{n-1},$$

eftersom $\sin\frac{k\pi}{2} = 0$ om k är jämnt, och $= (-1)^n$ om $k = 2n-1$ är udda. Det följer alltså att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \cdot (-1)^n = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

4. a) Termerna är positiva och $a_k = \frac{2^k + 3^{-k}}{3^k + 2^{-k}} \approx \frac{2^k}{3^k}$ om k är stort. Sätt $b_k = \frac{2^k}{3^k}$. Vi får

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2^k + 3^{-k}) \cdot 3^k}{(3^k + 2^{-k}) \cdot 2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{6^k + 1}{6^k + 1} = 1.$$

Eftersom $\sum b_k$ är konvergent (geometrisk serie med $r = \frac{2}{3}$) ger jämförelsetestet på gränsvärdesform att $\sum a_k$ också är konvergent. (Kvottestet, rottestet eller direkt jämförelse går också bra.)

b) Sätt $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Det är klart att $a_k \geq 0$ så den givna serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ är alternerande. Dessutom är a_k avtagande, eftersom (täljaren är konstant och) nämnaren är växande, och $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Leibniz test visar att serien är konvergent.

c) Serien är en geometrisk serie med $r = e^i$. Eftersom $|r| = 1$ divergerar serien. (Termerna går inte ens mot 0, ty $|e^{ik}| = 1$ för alla k.)

d) Låt $a_k = \sqrt{k} \sin\frac{1}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{k}}$ om k är stort. Sätt $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Vi får

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} k \sin\frac{1}{k} = 1.$$

(Standardgränsvärde efter variabelbytet $x = 1/k$.) Eftersom serien $\sum b_k$ är divergent (p-serie med $p = 1/2$), visar jämförelsetestet på gränsvärdesform att den givna serien också divergerar.

e) Eftersom

$$\frac{\ln(k+2) - \ln(k+1)}{\ln(k+1)\ln(k+2)} = \frac{1}{\ln(k+1)} - \frac{1}{\ln(k+2)}$$

är serien en teleskopserie. Det följer att partialsummorna

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k+2) - \ln(k+1)}{\ln(k+1)\ln(k+2)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+2)} \to \frac{1}{\ln 2}$$

då $n \to \infty$, så serien är konvergent (med summan $\frac{1}{\ln 2}$).

5. a) Som exempel på holomorf funktion som saknar primitiv funktion kan vi t.ex. ta $f(z) = \frac{1}{z}$ på sin naturliga definitionsmängd $\Omega = \{z : z \neq 0\}$. Om f skulle haft en primitiv funktion på Ω skulle

$$0 = \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

vilket är en motsägelse.

Teori från kapitel 3 säger att varje holomorf funktion definierad på ett enkelt sammanhängande område har en primitiv funktion, så det finns inget sådant exempel vars definitionsmängd är $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

b) Ur teori från kapitel 3 vet vi att (en kontinuerig funktion) f har en primitiv funktion på Ω om och endast om

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

för varje enkel, sluten kurva γ i Ω. Residyregel 1 ger att

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\, dz = 2\pi i \cdot (\cos z)'\big|_{z=0} = 0$$

om γ omsluter $z = 0$ och Cauchys integralsats visar att integralen är 0 om γ inte omsluter $z = 0$. Det följer alltså att $\frac{\cos z}{z^2}$ har en primitiv funktion på sin naturliga definitionsmängd $\Omega = \{z : z \neq 0\}$.

Alternativt kan man visa att $g(z) = \frac{\cos z}{z^2} - \frac{1}{z^2}$ har en hävbar singularitet i $z = 0$ och g har därmed en primitiv funktion G på hela $\mathbb{C}$. Eftersom $\frac{1}{z}$ är en primitiv funktion till $-\frac{1}{z^2}$ på $\Omega = \{z : z \neq 0\}$ har f en primitiv funktion $G(z) - \frac{1}{z}$ på Ω.

6. a) Sätt $f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+a^2}$ där $z^{1/2}$ betecknar den naturliga grenen av den komplexa kvadratroten, dvs. $z^{1/2} = \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log}_n z)$. Integrera f längs den vanliga hålkakan.

På den stora cirkeln med radie R har vi (ML-olikheten)

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2+a^2}\, dz \right| \leq 2\pi R \cdot \max_{|z|=R} \frac{|z^{1/2}|}{|z^2+a^2|} \leq 2\pi R \cdot \frac{4R^{1/2}}{R^2} = \frac{8\pi}{R^{1/2}} \to 0$$

då $R \to \infty$. På den lilla cirkeln med radie ε har vi

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{1/2}}{z^2+a^2}\, dz \right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \max_{|z|=\varepsilon} \frac{|z^{1/2}|}{|z^2+a^2|} \leq 2\pi\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{1/2}}{a^2/2} = \frac{4\pi\varepsilon^{3/2}}{a^2} \to 0$$

då $\varepsilon \to 0^+$. På den ”övre delen av reella axeln” får vi

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\, dx$$

och på den ”undre delen av reella axeln”

$$\int_R^\varepsilon \frac{\exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_n x)}{x^2+a^2}\, dx = -\int_\varepsilon^R \frac{\exp(\frac{1}{2}(\ln x + 2\pi i))}{x^2+a^2}\, dx = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\, dx.$$

Om vi sätter ihop alla fyra integralerna och låter $\varepsilon \to 0^+$ och $R \to \infty$, så får vi alltså med residyregel 4 (funktionen f har enkla poler i $z = \pm ia$):

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\, dx &= 2\pi i \Big(\operatorname*{Res}_{z=ia} \frac{z^{1/2}}{z^2+a^2} + \operatorname*{Res}_{z=-ia} \frac{z^{1/2}}{z^2+a^2} \Big) \\ &= 2\pi i \Big(\frac{z^{1/2}}{2z}\Big|_{z=ia} + \frac{z^{1/2}}{2z}\Big|_{z=-ia} \Big) = \frac{\pi}{\sqrt{a}}\big(e^{i\pi/4} - e^{3i\pi 4}\big) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{a}}, \end{aligned}$$

dvs.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

b) Med variabelbytet $x = \tan t$, dvs. $t = \arctan x$ får vi (eftersom $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}$)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan t}}{1+\cos^2 t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+\frac{1}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2^{3/4}}$$

ur a) med $a = \sqrt{2}$.