LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2018–08–31, Svar och anvisningar

1. $x_n = 3 \cdot 4^n - (n+2)\, 3^n$.

2. a) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, så $\sin i = i(e + e^{-1})/2$.

b) Serien är en teleskopsumma, och den n:te partialsumman blir $s_n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1} - 1$, vilket visar att serien divergerar. (Det går också bra att förlänga termvis med konjugatet och jämföra med en lämplig p-serie.)

c) Alla komplexa tal med principalargument mindre än $-3\pi/4$ duger, t.ex. $z = -2 - i$.

3. a) $\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \cos kt$.

b) Weierstrass M-test visar att serien konvergerar likformigt på hela $\mathbb{R}$.

4. a) Funktionen har enkla poler i $z = 3 + 3i$ och $z = 1 + 3i$.

b) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{1}{z^2 - (4+6i)z - 6 + 12i}\, dz = 0$

5. a) $|z| < 1$, enklast via kvottestet.

b) En term under summatecknet är tillräckligt (uppskattning mha Leibniz), dvs. $f(\frac{1}{2}) \approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{8 \cdot 2^4} = \frac{143}{128}$ med ett fel som (till beloppet) är mindre än $\frac{1}{1024}$.

c) Derivera termvis (varför är det tillåtet?), sätt in och förenkla.

6. a) Använd Cauchys integralformel för f' på en cirkelskiva med medelpunkt i z och radie $1 - |z|$. (Noga räknat på en något mindre cirkel och en gränsvärdesövergång.)

b) Nej, ett motexempel är $(1-z)^{1/2}$ med lämpligt grenval.