LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2018–04–09, Svar och anvisningar

1. $x_n = 3n^2 - n$.

2. a) $\ln 2 + \frac{i\pi}{2}$.

b) Funktionen $u(x, y) = e^x \sin 2y$ är inte harmonisk och därför inte realdelen av någon holomorf funktion.

c) Integralen $\int_{|z|=2} \bar{z}\, dz$ beräknas enklast via direkt parametrisering (eller med hjälp av observationen att $\bar{z} = 4/z$ längs kurvan). Svaret blir $8\pi i$.

3. a) Fourierserien blir $\dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^k}{k^2} \cos kt$.

b) Weierstrass M-test (eller teori för konvergens av Fourierserier) ger likformig konvergens på hela $\mathbb{R}$.

c) Sätt in $t = 0$ och utnyttja sats 7.16. Efter lite algebra fås $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

4. a) Se läroboken.

b) Funktionen $f(z) = \frac{z \sin(1/z)}{z^8+1}$ är holomorf på hela komplexa planet utom punkterna $z = 0$ samt $z = e^{i(\pi/8 + k\pi/4)}$ för $k = 0, 1, \ldots 7$.

c) Om $r > 0$ är tillräckligt litet omsluter kurvan $|z - 1| = r$ inte någon av singulariteterna i a). Integralens värde ges därmed via Cauchys integralformel:

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{|z-1|=r} \frac{z \sin(1/z)}{(z-1)(z^8+1)} = \pi i \sin 1.$$

5. a) Seriens konvergensskiva är $|z| < 1$. (Serien konvergerar även på cirkeln $|z| = 1$.)

b) Det givna närmevärdet är den första termen i serien. Felet är alltså högst:

$$|\text{fel}| \leq \left| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(1/2)^k}{k^4} \right| \leq \frac{1}{3^4} \sum_{k=3}^{\infty} (1/2)^k = \frac{1}{81 \cdot 4} = \frac{1}{364} < 0.003.$$

c) Potensserier får deriveras termvis:

$$f'(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^3}.$$

Insättning av $z = -\frac{1}{2}$ ger en serie för vilken Leibniz test fungerar. Om vi approximerar seriens värde med en partialsumma gör vi ett fel som till beloppet är mindre än den första utelämnade termen. Dvs:

$$f'(-\tfrac{1}{2}) = \frac{-1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 27} - \frac{1}{8 \cdot 64} + \cdots \approx \frac{-1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 27} = -\frac{23}{432} \approx -0.053$$

med ett fel som är mindre än $\frac{1}{8 \cdot 64} < 0.002$.

6. $\dfrac{\pi\alpha(1-\alpha)}{2 \sin \pi\alpha}$.