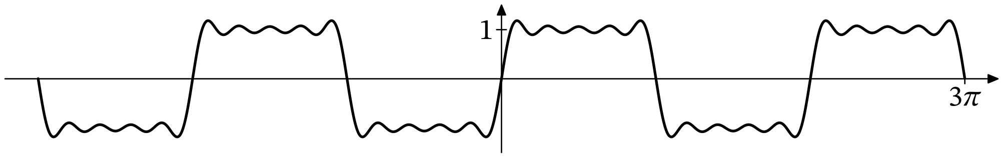
1. Om talföljden $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$ vet vi att $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ och att $a_k = 6a_{k-1} - 9a_{k-2}$ för $k \geq 2$. Bestäm konvergensskivan för potensserien $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-i)^k$.

   Lösning Vi löser den homogena rekursionsekvationen. Dess karakteristiska ekvation är $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ som har dubbelroten $\lambda = 3$. Alltså blir $a_k = (A+Bk)3^k$. Sätter vi in villkoren får vi $A = 0$ och $B = 1$. Alltså är $a_k = k3^k$. Rottestet ger nu $|a_k(z-i)^k|^{1/k} = k^{1/k}3|z-i| \to 3|z-i|$ då $k \to +\infty$. Konvergensskivan blir alltså den disk i det komplexa talplanet som har medelpunkt i och radie $1/3$.

2. Funktionen f har fourierserien

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \cdots\Big).$$

   I figuren nedan har grafen till en partialsumma av fourierserien ritats ut (faktiskt den med just de 5 termerna som skrivs ut i parentesen).



   a) Gissa vilken funktionen f är, och verifiera att din gissning är korrekt genom att beräkna fourierkoefficienterna för den funktion du gissat på. (0.6)
   b) Rita grafen till S_f (på samma intervall som delsumman ovan). (0.2)
   c) Avgör om fourierserien S_f konvergerar likformigt. (0.2)

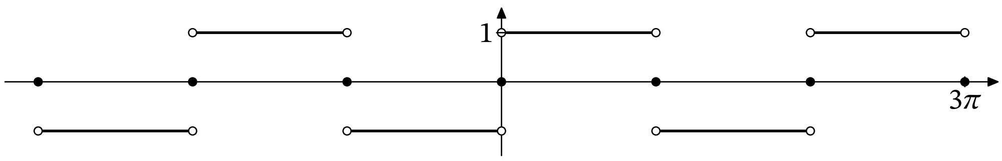
   Lösning

   a) Funktionen f är konstant -1 på intervallet $(-\pi, 0)$ och konstant 1 på $(0, \pi)$. Vi finner att de trigonometriska fourierkoefficienterna a_k blir 0 eftersom f är udda, $c_0 = 0$ eftersom f har medelvärde 0, och

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\cos(kt)}{k}\Big]_0^{\pi} = 2\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi k} = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & \text{om } k \text{ udda} \\ 0 & \text{om } k \text{ jämnt.} \end{cases}$$

   Vi noterar att detta stämmer med den givna seriens termer.

   b) Se figur:



   c) Eftersom S_f inte är kontinuerlig, medan termerna i fourierserien består av trigonometriska funktioner (som är kontinuerliga) så kan inte konvergensen vara likformig.

3. a) Ge exempel på en hel funktion f sådan att $g = 1/f$ är holomorf på $\mathbb{C}$, förutom i de fyra punkterna ± 1 och $\pm i$, där g har poler av ordning 2. (0.3)
b) Var är funktionen $z \mapsto \overline{\exp(\bar{z})}$ (där $\exp(w) = e^w$) holomorf? (0.3)
c) Var är funktionen $z \mapsto \frac{1}{2-\cos z}$ holomorf? (0.4)

Lösning

a) $f(z) = (z-1)^2(z+1)^2(z-i)^2(z+i)^2 = (z^4-1)^2$ duger.
b) I hela $\mathbb{C}$, eftersom funktionen är densamma som $z \mapsto \exp(z)$.
c) Eftersom funktionen är uppbygd av holomorfa funktioner, så är den holomorf överallt där den är definierad, dvs överallt förutom i de z där $\cos z = 2$. Vi löser ekvationen $\cos z = 2$. Denna kan skrivas $e^{iz} + e^{-iz} = 4$, eller, med $w = e^{iz}$, $w^2 - 4w + 1 = 0$. Alltså blir $w = 2 \pm \sqrt{3}$, varför $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$, och

$$z = \frac{1}{i}(\log(2 \pm \sqrt{3}) = \frac{1}{i}(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k i) = 2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vi drar alltså slutsatsen att funktionen $z \mapsto 1/(2 - \cos z)$ är holomorf i hela $\mathbb{C}$ förutom i punkterna $2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Avgör, för var och en av serierna nedan, om den är konvergent eller divergent.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^4}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\ln(1+k)}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2k+1}{3k}\right)^{k/2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k+(-1)^k}$$

Lösning

(i) Det gäller att $|(\sin k)/k^4| \le 1/k^4$ och eftersom $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^4$ är konvergent så följer det att $\sum_{k=1}^{+\infty} (\sin k)/k^4$ är absolutkonvergent, och därmed konvergent.

(ii) Vi observerar att $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Eftersom $\ln(1+k) > 0$ så är serien alternerande. Vidare, eftersom $1/\ln(1+k) \to 0$ monotont då $k \to +\infty$, så kan vi tillämpa Leibniz kriterium för att konstatera att $\sum_{k=1}^{+\infty} (\cos(k\pi))/\ln(1+k)$ är konvergent.

(iii) Det gäller att

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\left(\frac{2k+1}{3k}\right)^{k/2}\right|^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{2+1/k}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{2/3} < 1.$$

Den tredje serien är därmed konvergent enligt rottestet.

(iv) Det gäller att

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{3^{k+1}(k+1)!/(k+1)^{k+1}}{3^k k!/k^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{3}{(1+1/k)^k} = \frac{3}{e} > 1.$$

Den fjärde serien är därmed divergent enligt kvottestet.

(v) Slutligen gäller det att $0 \le 2^{-k+(-1)^k} \le 2^{-k+1}$ och eftersom den geometriska serien $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k+1}$ är konvergent så är den femte serien också konvergent.

5. Beräkna integralerna

$$\int_{|z|=1/2} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz, \quad \text{och} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{10}}\, dx.$$

Lösning

(i) Funktionen är holomorf överallt förutom där $z^{10} = -1$. Men alla sådana z uppfyller $|z| = 1$, och ligger därför utanför skivan $|z| \leq 1/2$. Cauchys integralsats ger att integralen blir 0.

(ii) Vi har nu alla poler innanför vår cirkel. Vi använder deformationssatsen, som säger att vår integral blir oförändrad om vi beräknar den längs en cirkel med radie R i stället om $R > 1$, dvs $\int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz = \int_{|z|=R} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz$. Men å andra sidan gäller det enligt ML-olikheten att

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz \right| \leq \frac{1}{R^{10}-1} 2\pi R.$$

Eftersom detta skall gälla för alla R drar vi slutsatsen att integralen måste vara 0. Detta hade man även kunnat sluta sig till genom att summera residyerna för de tio polerna.

(iii) Vi använder randen till en tårtbit med en öppningsvinkel som är dubbelt så stor som argumentet till den pol som har minst (positivt) argument. Polerna bestäms som lösningar till $z^{10} = -1$, dvs $z_k = e^{i\pi(2k-1)/10}$, $k = 1, ..., 10$. Den nyss nämnda polen i $z_1 = e^{i\pi/10}$ ger alltså öppningsvinkel $\pi/5$ på vår tårtbitskontur. Vi låter således $R > 0$ vara ett stort tal och Γ_R vara den kurva som består av bitarna γ_1, γ_2 och γ_3 som kan parametriseras som (observera att vi skriver en parametrisering för $-\gamma_3$)

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: z = t, \quad 0 \leq t \leq R \\ \gamma_2 &: z = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi/5 \\ -\gamma_3 &: z = te^{i\pi/5}, \quad 0 \leq t \leq R \end{aligned}$$

Residysatsen ger att (vi använder residyregel 4)

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/10}} \left(\frac{1}{1+z^{10}} \right) = \frac{2\pi i}{10(e^{i\pi/10})^9} = -\frac{\pi i e^{i\pi/10}}{5}$$

Å andra sidan är $\int_{\Gamma_R} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}$, och

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz = \int_0^R \frac{1}{1+t^{10}}\, dt,$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{1+z^{10}}\, dz = -\int_0^R \frac{1}{1+(te^{i\pi/5})^{10}} e^{i\pi/5}\, dt = -e^{i\pi/5} \int_0^R \frac{1}{1+t^{10}}\, dt.$$

ML-olikheten ger att $|\int_{\gamma_2} 1/(1+z^{10})\,dz| \le 1/(R^{10}-1)\pi R/5$ vilket konvergerar mot 0 då $R \to +\infty$. Vi finner alltså att

$$-\frac{\pi i e^{i\pi/10}}{5} = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^{10}}\,dz = (1-e^{i\pi/5})\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{10}}\,dt,$$

vilket efter omflyttning ger att

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{10}}\,dt = -\frac{\pi i e^{i\pi/10}}{5(1-e^{i\pi/5})} = \frac{\pi}{10\sin(\pi/10)} = \cdots = \frac{\pi}{10}(1+\sqrt{5}).$$

6. a) Antag att $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, där potensserien har oändlig konvergensradie, uppfyller olikheten

$$|f(z)| \le A + B|z|^N, \quad z \in \mathbb{C}$$

för några positiva konstanter A och B och något naturligt tal N. Visa att f måste vara ett polynom av grad högst N. (0.5)

b) Bestäm alla hela funktioner f som uppfyller olikheten

$$|f(z)| \le |\cos z|$$

för alla $z \in \mathbb{C}$. (0.5)

Lösning

a) Vi visar att koefficienterna $a_k = 0$ om $k > N$. Antag att $R > 0$ och att $k > N$. Enligt sats 8.10 (alternativt ett par formler på bladet) kan vi skriva a_k som

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz.$$

ML-olikheten ger därför att

$$|a_k| \le \frac{1}{2\pi}\frac{A+BR^N}{R^{k+1}}2\pi R.$$

Eftersom $k > N$ kommer detta uttryck att komma godtyckligt nära noll om R bara är tillräckligt stort. Därför är $a_k = 0$. Alltså är $f(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k z^k$, dvs ett polynom av grad högst N.

b) Vi låter $h(z) = f(z)/\cos z$. Eftersom f och cos är hela så är h holomorf, förutom isolerade singulariteter i de z för vilka $\cos z = 0$. Eftersom $|h(z)| \le 1$ för alla z där h är definierad blir singulariteterna hävbara. Vi kan alltså utvidga h till en hel funktion (som vi åter kallar h). Denna utvidgade funktion kommer att uppfylla olikheten $|h(z)| \le 1$ för alla $z \in \mathbb{C}$. Alltså är h hel och begränsad, varför den enligt Liouvilles sats är konstant. Det följer direkt att $f(z) = C\cos z$ för alla $z \in \mathbb{C}$, där den givna olikheten medför att $|C| \le 1$.