LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2017–10–25, Lösningar

1. Vi börjar med att lösa motsvarande homogena ekvation. Den karakteristiska ekvationen blir

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

med lösningar $r = -1 \pm i$. Lösningen till den homogena ekvationen blir alltså

$$x_n^h = C(-1+i)^n + D(-1-i)^n$$

där C och D är komplexa tal. Vi ansätter därefter en partikulärlösning, $x_n^p = A \cdot (-1)^n$ (eftersom $r = -1$ inte löser den karakterisktiska ekvationen, kan vi använda den naturliga ansatsen). Insättning ger

$$A \cdot (-1)^n - 2A \cdot (-1)^n + 2A \cdot (-1)^n = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Allmän lösning blir alltså $x_n = C(-1+i)^n + D(-1-i)^n + (-1)^n$. Insättning av begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} C + D + 1 = 0 \\ C(-1+i) + D(-1-i) - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C = D = -\frac{1}{2}$$

dvs.

$$\begin{aligned} x_n &= -\frac{1}{2}(-1+i)^n - \frac{1}{2}(-1-i)^n + (-1)^n \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}e^{-3\pi i/4}\right)^n + (-1)^n \\ &= -2^{n/2}\frac{e^{3\pi in/4} + e^{-3\pi in/4}}{2} + (-1)^n \\ &= -2^{n/2}\cos\frac{3\pi n}{4} + (-1)^n. \end{aligned}$$

I synnerhet blir $x_{34} = 1$.

2. a) Se läroboken.

b) För att u ska vara realdelen av en holomorf funktion krävs att u är harmonisk, dvs. att

$$0 = u''_{xx} + u''_{yy} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y$$

och de enda möjligheterna är $\alpha = 0$ eller $\alpha = 1$. (Ska man vara riktigt nogrann här blir definitionsmängden för u olika beroende på om α är ett heltal eller inte, men med de aktuella värdena på α är u definierad på hela $\mathbb{C}$. Och vill man vara ännu petigare behandlar man fallen $\alpha = 0$ och $\alpha = 1$ separat om man inte tycker om att skriva derivatan av x^0 som $0 \cdot x^{-1}$.)
Fall 1 ($\alpha = 0$): $u(x,y) = y$. Man kan hitta motsvarande v på flera olika sätt, t.ex. följer det att $g' = u'_x - iu'_y = -i$, dvs. $g(z) = -iz + C$, där C är rent imaginär.
Fall 2 ($\alpha = 1$): $u(x,y) = xy$. Med motsvarande metod måste $g' = u'_x - iu'_y = y - ix$. Identitetssatsen (sätt $y = 0$, $x = z$) ger $g'(z) = -iz$ och därmed $g(z) = -iz^2/2 + C$, där C är rent imaginär.

3. a) Nämnaren har nollställen i $x = -\pi/2$ (dubbelt, vilket syns direkt ur den givna faktoriseringen) och $z = -1 \pm i$ (enkla). Faktorn e^{2z+i} saknar nollställen. Man kontrollerar att täljaren har ett enkelt nollställe i $z = -\pi/2$ (t.ex. genom att notera att derivatan av $\cos z$ är $-\sin z$, så i punkter där täljaren är 0 är täljarens derivata nollskild).

Sammanfattningsvis får vi alltså tre poler: $z = -\pi/2$, $z = -1+i$ och $z = -1-i$, och samtliga poler är enkla.

b) Ur Taylors sats och dess konsekvenser följer att Taylorserien konvergerar på den största öppna cirkelskiva centrerad i $c = 1 - 2i$ på vilken f är holomorf.

Ur resultatet i a) ser vi att $z = -1-i$ är den pol som ligger närmast c (rita figur!) och $|(-1-i) - c| = \sqrt{5}$. Serien konvergerar alltså på cirkelskivan $|z - (1-2i)| < \sqrt{5}$.

c) Eftersom $\lim_{k\to\infty} k^{-1/k} = \lim_{k\to\infty} e^{-\ln k/k} = e^0 = 1$, ser vi att termerna i den första serien inte går mot 0. Serien måste därför divergera.

För den andra serien passar nog kvottestet bäst. Sätt $a_k = \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}$. Vi får

$$\kappa = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{((k+1)!)^2}{2^{(k+1)^2}}}{\frac{(k!)^2}{2^{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2 \cdot 2^{k^2}}{(k!)^2 \cdot 2^{(k+1)^2}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)\cdot k!)^2 \cdot 2^{k^2}}{(k!)^2 \cdot 2^{k^2+2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{2^{2k+1}} = 0.$$

Eftersom $\kappa < 1$ visar kvottestet att serien konvergerar.

4. a) Eftersom $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ är holomorf på en omgivning av $|z| \le 1$ visar Cauchys integralsats att integralens värde blir 0. (Singulariteterna finns i $\pm\frac{\pi}{2} \pm 2\pi k$, för $k \in \mathbb{Z}$.)

b) Integranden är holomorf förutom i $z = 0$. Residyregel 1 eller 2 ger de enklaste beräkningarna. Med residyregel 1 får vi:

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - \cos z}{z^3}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{e^z - \cos z}{z^3}\right) = 2\pi i \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dz^2}(e^z - \cos z)\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \pi i\big(e^z + \cos z\big)\Big|_{z=0} = 2\pi i.$$

c) Enklast är att notera att $F(z) = -\cot z$ är en primitiv funktion till integranden (och F är holomorf på en omgivning av kurvan $|z| = 3$). Integralens värde blir därför 0. Det går också bra att beräkna residyn i $z = 0$, även om det är lite besvärligare. Ett tredje alternativ är att utnyttja idén i övningsuppgift 3.34b.

5. a) Serie A och B är Fourierserien för en udda respektive jämn funktion, och eftersom f är varken udda eller jämn måste dessa två vara fel.

Vidare noterar vi att $f(t) - \frac{1}{2}\cos t$ blir udda (medan $f(t) - \frac{1}{2}\sin t$ inte har några uppenbara symmetrier). Detta visar att Fourierserien för f måste vara

$$\frac{1}{2}\cos t + \text{sinus-termer},$$

vilket utesluter serie E och F.

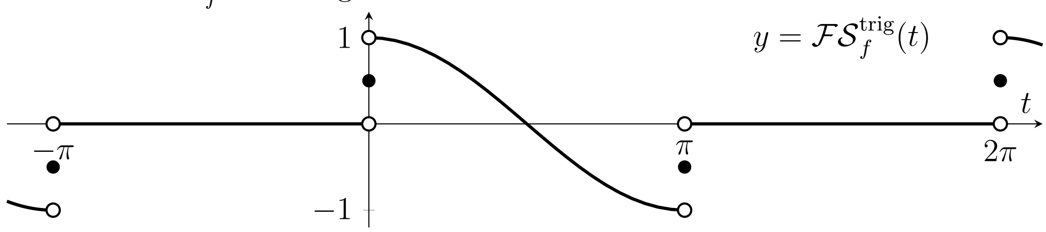
Termerna i serie D går snabbt mot noll:

$$\left\| \frac{k^2}{\pi(4k^2-1)^2} \sin kt \right\| = \frac{k^2}{\pi(4k^2-1)^2} \le \frac{C}{k^2}$$

för någon lämplig kontant C. Weierstrass M-test visar därmed att serie D konvergerar likformigt, och dess summa är därför kontinuerlig. Eftersom f:s Fourierserie inte är kontinuerlig (se b) för ett fullständigt argument), kan D heller inte vara den sökta Fourierserien. Vi har därmed uteslutit alla möjligheter förutom C, som måste vara det rätta svaret.

b) Funktionen f är L^1 (styckvis kontinuerlig och begränsad) och har höger- och vänstergränsvärden liksom höger- och vänster-"derivator" i varje punkt (en prydlig graf räcker som motivering). Funktionen uppfyller därmed villkoren i sats 7.18 i alla punkter (och sats 7.16 i de flesta punkter). Fourierserien konvergerar alltså (punktvis) för alla t, och seriens summa ges av $f(t)$ i de punkter där f är kontinuerlig och $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ i de punkter där f har en språngdiskontinuitet.

Grafen för $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}$ ses i figuren nedan:



Eftersom seriens summa är diskontinuerlig (t.ex. i punkten $t=0$) och Fourierseriens termer är kontinuerliga funktioner, kan serien inte konvergera likformigt. (Sats 6.26.)

c) Ur lösningen i a) ser vi att $c_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_k = \frac{((-1)^k+1)k}{\pi(k^2-1)}$ för $k \ge 2$ och alla övriga koefficienter i Fourierserien är 0.

Parsevals formel (på trigonometrisk form) ger

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}|a_1|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{((-1)^k+1)k}{\pi(k^2-1)}\right)^2.$$

Dvs. (integralberäkning utelämnad)

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{((-1)^k+1)^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

Observera att $(-1)^k+1$ är 0 om k är udda och 2 om k är jämn. Det räcker alltså att summera över jämna k

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k=2\\k \text{ jämn}}}^{\infty}\frac{4k^2}{(k^2-1)^2} = [\text{Sätt } n = 2k]$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{((2n)^2-1)^2} = \frac{1}{8} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2},$$

dvs.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}.$$

6. a) Se läroboken.

b) Cauchys integralsats och ML-olikheten ger:

$$|f(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi \cdot \max_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \max_{|z|=1}\left|f(z)\right| \leq M.$$

c) Betrakta funktionen $g(z) = f(z)f(-z)$ (eller $g(z) = f(z)\overline{f(\bar{z})}$). Då är g holomorf på samma cirkelskiva som f är, och dessutom är $|g(z)| \leq 2 \cdot 8 = 16$ för alla z på enhetscirkeln. (Den ena faktorn är mindre än 2 och den andra är mindre än 8 enligt antagandet på f). Ur b) följer då att $|g(0)| \leq 16$, men $|g(0)| = |f(0)|^2$, så $|f(0)| \leq 4$.