LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
Funktionsteori
2017–06–08

1.a) Polerna är rötterna till $\sin z = 2$. Med $w = e^{iz}$ få vi $w^2 - 4iw - 1 = 0$ och $w_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3})i$. Det följer att $iz = \log(2 \pm \sqrt{3})i$ och

$$z_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln|2 \pm \sqrt{3}|, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Vi notera att $z_k \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ for alla $k, l \in \mathbb{Z}$. Eftersom $(\sin z)'|_{z=z_k} = \cos z_k \neq 0$ är alla poler enkla.

1.b) Karakteristiska ekvationen är $r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) = 0$. Den har rötterna $r = 2$ och $r = -3$. Allmänna lösningen till det homogena systemet är därför

$$a_n^{hom} = C_1 2^n + C_2 (-3)^n .$$

Ansats för partikulärlösningen $a_n^{part} = An + B$ ger $A = -1, B = 0$.
Insättning av begynnelsevärdena ger $C_1 = \frac{2}{5}$, $C_2 = -\frac{2}{5}$

Svar:

$$a_n = \frac{2}{5}2^n - \frac{2}{5}(-3)^n - n.$$

2. a) Vi kontollerar $\Delta 2x(1-y) = \Delta(2x - 2xy) = 0$. Alltså är u harmonisk. Med C-R ekvationerna får vi

$$v'_y = u'_x = 2 - 2y \quad \text{och} \quad v(x,y) = 2y - y^2 + \phi(x).$$

Vidare

$$\phi'(x) = v'_x = -u'_y = 2x \quad \text{och} \quad \phi(x) = x^2 + C.$$

Det medför $v(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Insättning av $z = x, y = 0$ ger

$$f(z) = 2z + iz^2 + Ci, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Med $f(i) = 0$ får vi $f(z) = 2z + iz^2 - i$.

b) Med $z = x + iy$ får vi $g(z) = -4y^2$, dvs. $u = -4y^2, v = 0$. C-R ekvationerna ger $u'_y = -8y^2 = -v'_x = 0$, $0 = u'_x = v'_y$. Därför är $g(z)$ deriverbar om och endast om $y = 0$, dvs. $z \in \mathbb{R}$.

3. a) För den första serien använda vi kvotkriteriet:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right|}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Den andra serien kan vi dela upp i tre serier med respektiva konvergensradier $R_1 = 1, R_2 = \frac{1}{2}$ och $R_3 = 2$. Konvergensradien av serien är den gemensamma av den (dvs. minsta) radien för den tre serier, dvs. $R = \frac{1}{2}$.

b) Weierestraß M-test ger att

$$|u_n(x)| \le \frac{1}{n^2+1} = M_n \quad \text{och} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$$

och därför är serien likförmig konvergent. Det medför att serien är också punktvis konvergent. Eftersom u_n är kontinuerliga och serien konvergerar likförmigt är seriesumman (vilken stämmer överens med $f(x)$) kontinuerlig. För $x = 0$ får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = \infty,$$

dvs. serien är inte konvergent i $x = 0$.

4. Med variabelbyte $z = e^{it}$ och Eulers formel får vi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos t)^2}\, dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z+2)^2} \frac{z}{4i}\, dz.$$

Bara dubbelpolen $z = -\frac{1}{2}$ ligger innuti enhetscirklen och

$$Res_{z=-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 (z+2)^2} \frac{z}{4i} \right) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{4i(z+2)^2} \right) = \frac{5}{27i}.$$

Detta ger

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+4\cos t)^2}\, dt = 2\pi i \frac{5}{27i} = \frac{10\pi}{27}.$$

5) Vi beräkna

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx)\, dx &= \left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + 2n \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin(nx)\, dx \\
&= 4(-1)^n + 2n \left(\left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + 2n \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\, dx \right) \\
&= 4(-1)^n + 4n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\, dx.
\end{aligned}$$

Vi får ($f(x)$ är jämnt) för $k = 1, 2, \cdots$:

$$b_k = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx)\, dx = \frac{4}{\pi}(-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2-1}$$

och

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx = \frac{2}{\pi}.$$

Eftersom f är C^1 i intervalet $(-\pi, \pi)$ är för $x \in (-\pi, \pi)$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2-1} \cos(nx).$$

Speciellt för $x = \pi$ har vi

$$f(\pi) = 0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

och

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Med hjälp av Parselvals formel får vi

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{16n^4 - 8n^2 + 1}.$$

Därför

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^4 - 8n^2 + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\pi^2.$$

6 Om f, g är kontinuerliga 1-periodiska funktioner så existera deras Fourierkoefficienter $c_n(f), c_n(g)$ och vi har den associerade (formella) Fourierserier $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i n x}$ och $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i n x}$ respektive. Entydighetssatsen (Sats 7.24) säger om $c_n(f) = c_n(g)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ så är $f(x) = g(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

a) Antag att $f(x) = C$ är en konstant funktion. Så är för $n \neq 0$

$$c_n(f) = \int_0^1 C e^{-2\pi i n x}\, dx = 0.$$

Omvänt antag att $c_n(f) = 0$ för alla $n \neq 0$. Så har f samma Fourierkoefficienter som det konstanta funktion $g(x) = c_0$. Entydighetssatsen medför att $f(x) = c_0$.

b) Antag att $e^{2\pi i n x} = 1$, $n \neq 0$. Där är $2\pi i n x = 2k\pi i$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Det följer att $x = \dfrac{k}{n} \in \mathbb{Q}$.

c) Låt $f(x) = f(x+1) = f(x + \sqrt{2})$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Vi skull jämföra de associerade Fourierserierna

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i n x}$$

och

$$f(x + \sqrt{2}) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i n (x + \sqrt{2})} = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(c_n(f) e^{2\pi i n \sqrt{2}}\right) e^{2\pi i n x}.$$

Entydighetssatsen ger att

$$c_n(f) = c_n(f) e^{2\pi i n \sqrt{2}}.$$

Eftersom $\sqrt{2}$ är irrationellt ger b) att $c_n(f) = 0$ om $n \neq 0$. Nu ger a) sista steget i beviset.