SVAR/LÖSNINGAR **FUNKTIONSTEORI**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **FMAF01**
MATEMATIK **2017–03–13 kl. 8–13**

1. a) $z \mapsto |z|^2$ är endast komplext deriverbar för $z = 0$. Jämför uppgift 1.9d.

b) Ja, både $\cos^2 z + \sin^2 z$ och 1 är holomorfa på $\mathbb{C}$, och identiteten gäller uppenbarligen för reella z. Entydighetssatsen ger att den gäller i hela $\mathbb{C}$.

c) Ja, ty om $\operatorname{Re} z > 0$ så kan vi skriva $z = re^{it}$ med $-\pi/2 < t < \pi/2$ och $r > 0$. Då är $z^2 = r^2 e^{i2t}$, och alltså

$$\operatorname{Log}(z^2) = \ln r^2 + i2t = 2(\ln r + it) = 2\operatorname{Log}(z).$$

d) Vi förlänger med konjugatet, och får

$$\operatorname{Re}\frac{R+z}{R-z} = \operatorname{Re}\frac{(R+z)(R-\bar{z})}{|R-z|^2} = \frac{R^2 - |z|^2}{|R-z|^2} > 0.$$

I det näst sista steget använde vi att $zR - R\bar{z} = 2i\operatorname{Im}(zR)$ är rent imaginär, i det sista att $|z| < R$.

e) Följden (u_k) är lösning till den homogena rekursionsekvation av ordning två vars karakteristiska ekvation har rötterna 2 och 3. Det följer därmed att $a = -(2+3) = -5$ och $b = 2 \cdot 3 = 6$.

2. a) Det gäller att (de trigonometriska funktionerna ger inget bidrag eftersom de integreras över en hel period)

$$\int_\gamma \frac{1+z^2}{z}\,dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+(e^{it})^2}{e^{it}} ie^{it}\,dt = i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \cos 2t + i\sin 2t\,dt = i\pi.$$

b) Se sats 3.15 i kursboken. För den andra delen finns oändligt många val. Välj en holomorf funktion och en enkel, sluten och slät kurva, och där minst en av de två är ”krånglig”.

3. a) d'Alemberts kvottest, med $u_k(x) = x^k/k$, ger

$$\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \frac{k}{k+1}|x| \to |x|, \quad \text{då } k \to +\infty.$$

Alltså konvergerar serien $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k/k$ då $|x| < 1$ och divergerar då $|x| > 1$. För $x = -1$ övergår vår serie i den alternerande serien $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k/k$. Eftersom $|(-1)^k/k| = 1/k$ avtar monotont mot 0 då $k \to +\infty$ erhåller vi konvergens enligt Leibniz kriterium. För $x = 1$ återfår vi den harmoniska serien som är en välkänd divergent p-serie. Serien konvergerar alltså om och endast om $-1 \leqslant x < 1$.

b) Eftersom det för varje $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{(k+ix)^2}\right| = \frac{1}{k^2+x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

så följer det enligt en jämförelsesats (där vi jämför med den konvergenta p-serien $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$) för positiva serier att den aktuella serien är absolutkonvergent för varje $x \in \mathbb{R}$. Absolutkonvergens medför konvergens, så serien är konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$.

c) Cauchys rottest, med $u_k = x^k/(1+1/k)^{k^2}$, ger

$$\left|\frac{x^k}{(1+1/k)^{k^2}}\right|^{1/k} = \frac{1}{(1+1/k)^k}|x| \to \frac{1}{e}|x|, \quad \text{då } k \to +\infty.$$

Alltså konvergerar serien för $|x| < e$ och divergerar för $|x| > e$. Från den välkända olikheten $\ln(1+x) < x$ följer det att $(1+1/k)^k < e$, vilket i sin tur medför att $|(\pm e)^k/(1+1/k)^{k^2}| > 1$, så termerna i serien går inte mot 0 då $x = \pm e$, varför serien inte heller då kan konvergera (enligt divergenskriteriet). Serien konvergerar alltså precis då $|x| < e$.

4. Byter vi t mot $-t$ och gör variabelbytet $x \mapsto -x$ ser vi att vi får tillbaka samma integral. Vi behöver alltså endast beräkna integralen för $t \geqslant 0$. För ändamålet låter vi $R > 0$ och γ_1 vara den kurva som har parametrisering Re^{is}, $0 \leqslant s \leqslant \pi$ och γ_2 den linje som sammanbinder $z = -R$ med $z = R$. Vi sätter $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Med $f(z) = e^{itz}/(z+i)^2$ och $R > 1$ får vi, enligt Cauchys integralformel, för derivatan, (som kan användas eftersom f är holomorf överallt i $\mathbb{C}$ förutom i $z = -i$)

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}\,dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-i)^2}\,dz = i2\pi f'(i) = \frac{\pi}{2}(1+t)e^{-t}.$$

För z på γ_1 är $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ och, eftersom $t \geqslant 0$, $|e^{itz}| = e^{-t\operatorname{Im} z} \leqslant 1$. Vidare ger omvända triangelolikheten att (här är $|z| = R > 1$)

$$|(z^2+1)^2| = |z^2+1|^2 \geqslant (|z|^2-1)^2 = (R^2-1)^2,$$

varför vi med triangelolikheten för integraler får (om man vill kan man i stället referera till standarduppskattningen för rationella funktioner och ML-olikheten)

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}\,dz\right| \leqslant \int_{\gamma_1} \frac{1}{|(1+z^2)^2|}|dz| \leqslant \frac{1}{(R^2-1)^2}\int_{\gamma_1} |dz| \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}.$$

Det följer att

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+x^2)^2}\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{itx}}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{\gamma_1} \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}\,dz\right] = \frac{\pi}{2}(1+t)e^{-t}.\end{aligned}$$

Eftersom vi tidigare noterat att integralen är jämn i t gäller det alltså att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(1+|t|)e^{-|t|}.$$

5. Fourierserien för f kan inte konvergera likformigt. Delsummorna är ju nämligen kontinuerliga funktioner, medan f inte är det (den gör ju ett hopp i $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Likformig konvergens hade motsagt sats 6.26 i boken.

För att visa att Fourierserien för g konvergerar likformigt beräknar vi först fourierkoefficienterna. Eftersom g är jämn beräknar vi dess cosinusserie med hjälp av upprepad partialintegration:

$$\begin{aligned} a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(kx)\,dx &\overset{k\neq 0}{=} \frac{2}{\pi k}\big[x^2\sin(kx)\big]_0^\pi - \frac{4}{\pi k}\int_0^\pi x\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi k^2}\big[x\cos(kx)\big]_0^\pi - \frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx = \frac{4(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

samt

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Alltså ges Fourierserien för g av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_0\cos(kx) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx).$$

Låter vi nu $u_0 = \pi^2/3$ och $u_k(x) = 4(-1)^k/k^2\cdot\cos(kx)$ för $k \geqslant 1$ så gäller det dels att varje u_k är kontinuerlig, men även att supremumnormen kan beräknas som $\|u_0\| = \pi^2/3$ respektive $\|u_k\| = 4/k^2$ för $k \geqslant 1$. Serien $\pi^2/3 + \sum_{k=1}^{+\infty} 4/k^2$ är konvergent (känd konvergent ”p-serie”). Weierstrass M-test ger därför att funktionsserien $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt. Men det betyder ju precis att Fourierserien för g är likformigt konvergent.

Vidare, eftersom g är kontinuerlig och styckvis glatt så gäller det att dess Fourierserie konvergerar punktvis överallt mot g. Speciellt gäller det för $x = \pi$ att (här använder vi att $\cos(k\pi) = (-1)^k$)

$$\pi^2 = g(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2},$$

varför $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

6. a) Kvottestet ger att den potensserie som I_0 är definierad av har konvergensradie $R = +\infty$. Speciellt följer det att vi kan derivera potensserien termvis hur många gånger vi vill (och att de på så vis uppkomna serierna representerar I_0', I_0'' och så vidare). Vi får

$$I_0'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \quad \text{samt} \quad I_0''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(2k-1)/2}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2}.$$

Det följer att

$$\begin{aligned}
x^2 I_0''(x) + xI_0'(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \frac{2k(2k-1)}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \frac{2k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{((k-1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)} \\
&= x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = x^2 I_0(x).
\end{aligned}$$

b) Det gäller ju att $\int_{|z|=1} z^m \, dz = 0$ om $m \neq -1$ och $\int_{|z|=1} 1/z \, dz = i2\pi$. Vi söker således en konstant term i binomialutvecklingen av $(z + 1/z)^k$. En sådan finns inte om k är udda. Om $k = 2n$ är jämnt så blir den konstanta termen $\binom{2n}{n}$, varför

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{|z|=1} \frac{(z+1/z)^k}{z} \, dz = \begin{cases} 0 & k \text{ udda} \\ \binom{2n}{n} & k = 2n. \end{cases}$$

c) Låt $x \in \mathbb{R}$. Vi använder Maclaurinserien för exponentialfunktionen,

$$e^{x \cos\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (x \cos\theta)^k. \tag{$*$}$$

Eftersom

$$\left| \frac{1}{k!} (x\cos\theta)^k \right| \leqslant \frac{|x|^k}{k!}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

och

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|}$$

följer det från Weierstrass M-test att konvergensen hos serien i $(*)$ är likformig för $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Vi kan alltså integrera termvis, och får

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^k \, d\theta.$$

Vi skriver nu om integralen som en kurvintegral längs enhetscirkeln, genom att låta $z = e^{i\theta}$. Vi använder dessutom att $\cos\theta = (z + 1/z)/2$ och att $d\theta = 1/(iz)\, dz$, och landar i

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta} \, d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^k}{k!} \frac{1}{i2\pi} \int_{|z|=1} \frac{(z+1/z)^k}{z} \, dz$$

vilket enligt resultatet i b)-uppgiften kan skrivas (här är $k = 2n$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{(2n)!} \binom{2n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = I_0(x).$$