LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2019–04–29 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Vilka av följande påståenden är sanna respektive falska? Lämna endast svar. Varje rätt svar ger +0.2p, varje felaktigt -0.2p (så det kan vara bättre att hoppa över en fråga som du är osäker på). Du kan förstås inte få mindre än 0p på uppgiften.

a) Imaginärdelen av en holomorf funktion är harmonisk.

b) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^n \, dz = 0$ för varje heltal n.

d) Det finns en funktion f som är holomorf på hela $\mathbb{C}$, sådan att $f'(z) = \sin(z^2)$.

e) Om f har en isolerad singularitet i $z = 0$ och $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$, så måste singulariteten vara hävbar.

2. Avgör vilka av nedanstående serier som konvergerar respektive divergerar. Motivera noggrant! (0.2/styck)

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+\sqrt{k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2k+1}}{k!}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k}{k^2}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\ln k}}$ e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{(\ln k)^5}$

3. Talföljden $x_0, x_1, x_2, \ldots$ uppfyller att

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 1$$

för några konstanter a och b och alla heltal $n \geq 0$. Beräkna x_{100} om du vet att $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 3$.

4. Funktionsföljden $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ges av

$$f_n(x) = x^n(1-x).$$

Visa att följden konvergerar punktvis (då $n \to \infty$). Vad blir gränsfunktionen? Konvergerar följden likformigt?

5. Beräkna integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+4)^2} \, dx.$$

6. Låt $n \geq 0$ vara ett heltal. Bestäm den exponentiella Fourierserien till den 2π-periodiska funktionen $f(t) = (1+e^{it})^n$. Använd Fourierserien för att beräkna summan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$