

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara, läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna, om möjligt, tydliga och enkla svar.

1. Finns det någon holomorf funktion $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ på \mathbb{C} vars realdel ges av $u(x, y) = (1 + xy)(x^2 - y^2)$? Bestäm i sådana fall samtliga sådana, och uttryck dem som funktion av $z = x + iy$.

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z + 3}$$

i en potensserie centrerad i $1 + 3i$. Vilken konvergensradie får potensserien?

3. Uttryck den 2π -periodiska funktionen f , som i intervallet $[-\pi, \pi)$ ges av $f(x) = |x|$, i en trigonometrisk fourierserie. Använd denna fourierserie för att bestämma värdet av en av serierna

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}.$$

4. Beräkna $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} k e^{-k} \sin(kx) dx$ och $\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-k} \sin(kx) dx$.

5. Man kan visa (det behöver du inte göra) att integralerna

$$I_k(x) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx) - \cos(kt)}{\cos x - \cos t} dt, \quad k \geq 0$$

för varje $x \in \mathbb{R}$ uppfyller rekursionsekvationen

$$I_{k+2}(x) - 2 \cos x I_{k+1}(x) + I_k(x) = 0, \quad I_0(x) = 0, \quad I_1(x) = \pi.$$

Lös rekursionsekvationen, och bestäm på så sätt ett uttryck för $I_k(x)$, $k \geq 0$.

6. (a) Beräkna integralen $\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{2z^2 - z} dz$.

- (b) Förklara varför integralen

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Re} z}{z - 1/2} dz$$

inte kan beräknas direkt med Cauchys integralformel med $f(z) = \operatorname{Re} z$. Beräkna sedan integralen.