

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Bestäm alla reella tal  $a$  och  $b$  sådana att

$$u(x, y) = x^2 + axy + by^2$$

är realdelen av någon holomorf funktion  $f$  (definierad på hela komplexa planet). Beräkna också alla sådana funktioner  $f$  (svara med  $f$  uttryckt som funktioner av  $z$ , inte som funktioner av  $x$  och  $y$ ).

2. Beräkna alla möjliga värden av följande tal (svara på rektangulär form)  $(5 \times 0.2)$

a)  $\left| \frac{(1-i)^5 \cdot (2+i)}{(1-3i)^3} \right|$       b)  $\tan i$       c)  $i^{-1/3}$       d)  $\operatorname{Log}(e^{7i})$       e)  $e^{\operatorname{Log}(7i)}$

3. Funktionen  $f$  är 2-periodisk, udda, och uppfyller att  $f(t) = 2t - t^2$  för  $0 \leq t < 1$ . Låt

$$S(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)$$

beteckna  $f$ :s trigonometriska Fourierserie.

a) Rita i varsitt koordinatsystem graferna  $y = f(t)$  respektive  $y = S(t)$  för  $-2 \leq t \leq 2$ .  $(0.4)$

b) Är serien  $S(t)$  punktvis konvergent på hela  $\mathbb{R}$ ? Likformigt konvergent på hela  $\mathbb{R}$ ?  $(0.3)$

c) Beräkna  $a_{2018}$ ,  $S(\frac{1}{2})$  respektive  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_{2n-1}$ .  $(0.3)$

4. Avgör vilka av följande serier som konvergerar respektive divergerar.  $(5 \times 0.2)$   
Motivera ordentligt.

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{-k}}{3^k + 2^{-k}}$       b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$       c)  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik}$

d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \sin \frac{1}{k}$       e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+2) - \ln(k+1)}{\ln(k+1) \ln(k+2)}$

5. a) Ge ett exempel på en holomorf funktion  $f$  som saknar primitiv funktion. Finns det något sådant exempel vars definitionsmängd är  $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ ? Motivera dina påståenden!  $(0.6)$

b) Har  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$  en primitiv funktion (på sin naturliga definitionsmängd)?  $(0.4)$

6. a) Låt  $a > 0$  vara ett reellt tal. Beräkna integralen  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{a^2 + x^2} dx$ .  $(0.7)$

b) Beräkna integralen  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan t}}{1 + \cos^2 t} dt$ .  $(0.3)$