LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2018–08–31 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 3^{n+1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 3$.

2. a) Hur definieras den komplexa sinusfunktionen, $\sin z$? Beräkna real- och imaginärdelen av $\sin i$. (0.3)

b) Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-2}\right)$ konvergerar. (0.3)

c) Ge ett konkret exempel på ett komplext tal z för vilket (0.4)

$$\operatorname{Log} \frac{z}{-1+i} \neq \operatorname{Log} z - \operatorname{Log}(-1+i).$$

3. Funktionen f är 2π-periodisk och $f(t) = |t|$ för $-\pi \leq t \leq \pi$.

a) Beräkna den trigonometriska Fourierserien för f. (0.6)

b) Avgör om serien i a) konvergerar likformigt på något intervall som innehåller $t = 0$. Bestäm i så fall det största sådana intervallet. (0.4)

4. Betrakta funktionen $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - (4+6i)z - 6 + 12i}$.

a) Bestäm alla singulariteter för f (och ange ordningen av eventuella poler). (0.4)

b) Beräkna integralen (0.6)

$$\int_{|z|=5} \frac{1}{z^2 - (4+6i)z - 6 + 12i}\, dz.$$

5. Funktionen $f(z)$ definieras genom

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k \cdot k!}\, z^{2k}.$$

a) Bestäm konvergensskivan för f. (0.3)

b) Beräkna ett närmevärde till $f(\frac{1}{2})$ med ett fel som är högst 0.001. (0.3)

c) Visa att f är en lösning till differentialekvationen (0.4)

$$(z^2 + 1)\, f'' + zf' - f = 0.$$

6. Anta att f är holomorf på enhetsskivan $|z| < 1$ och att f är begränsad, $|f| \leq M$.

a) Visa att $|f'(z)| \leq \dfrac{M}{1 - |z|}$. (0.6)

b) Måste f' vara begränsad? (0.4)