

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 6$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$.
2. a) Beräkna $\text{Log}((-1 - i)^2)$. (0.3)
 b) Finns det någon holomorf funktion på \mathbb{C} , vars realdel är $u(x, y) = e^x \sin 2y$? (0.3)
 c) Beräkna kurvintegralen $\int_{|z|=2} \bar{z} dz$. (0.4)
3. Den 2π -periodiska funktionen f uppfyller att $f(t) = t^2$ för $-\pi \leq t \leq \pi$.
 a) Bestäm den trigonometriska Fourierserien för f . (0.4)
 b) Konvergerar serien i a) likformigt på intervallet $[-\pi, \pi]$? (0.3)
 c) Utnyttja resultatet i a) för att beräkna summan av serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$. (0.3)
4. a) Definiera vad som menas med att en funktion är *holomorf*. (0.2)
 b) Var är funktionen $f(z) = \frac{z \sin(1/z)}{z^8 + 1}$ holomorf? (0.4)
 c) Beräkna
$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{|z-1|=r} \frac{z \sin(1/z)}{(z-1)(z^8+1)} dz$$
 (0.4)
5. Funktionen $f(z)$ definieras genom
$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k^4}$$

 a) Bestäm konvergensskivan för f . (0.2)
 b) Vi vill beräkna ett närmevärde till $f(\frac{1}{2})$. Uppskatta hur stort felet i approximationen
$$f(\frac{1}{2}) \approx \frac{1}{64}$$
 är. (0.4)
 c) Ge ett närmevärde till $f'(-\frac{1}{2})$ med ett fel som är högst 0.002. (0.4)

6. Låt $0 < \alpha < 1$. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)^3} dx.$$

Tips: integrera en lämpligt vald funktion längs en "hålkaka".