TENTAMENSSKRIVNING I MATEMATIK **FMAF01–FUNKTIONSTEORI**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **2018-03-12, 08:00–13:00**

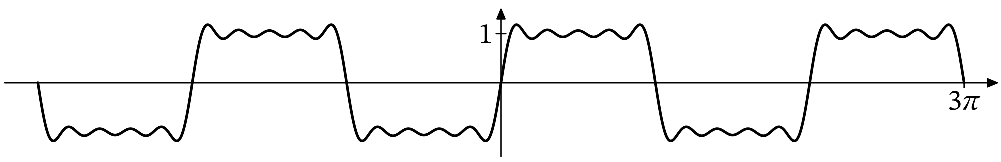
Hjälpmedel: Bifogat formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Om talföljden $(a_k)_{k=0}^{+\infty}$ vet vi att $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ och att $a_k = 6a_{k-1} - 9a_{k-2}$ för $k \geq 2$. Bestäm konvergensskivan för potensserien $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-i)^k$.

2. Funktionen f har fourierserien

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \cdots\Big).$$

I figuren nedan har grafen till en partialsumma av fourierserien ritats ut (faktiskt den med just de 5 termerna som skrivs ut i parentesen).



a) Gissa vilken funktionen f är, och verifiera att din gissning är korrekt genom att beräkna fourierkoefficienterna för den funktion du gissat på. (0.6)

b) Rita grafen till S_f (på samma intervall som delsumman ovan). (0.2)

c) Avgör om fourierserien S_f konvergerar likformigt. (0.2)

3. a) Ge exempel på en hel funktion f sådan att $g = 1/f$ är holomorf på $\mathbb{C}$, förutom i de fyra punkterna ± 1 och $\pm i$, där g har poler av ordning 2. (0.3)

b) Var är funktionen

$$z \mapsto \overline{\exp(\bar{z})}$$

(där $\exp(w) = e^w$) holomorf? (0.3)

c) Var är funktionen

$$z \mapsto \frac{1}{2 - \cos z}$$

holomorf? (0.4)

4. Avgör, för var och en av serierna nedan, om den är konvergent eller divergent.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^4}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\ln(1+k)}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\frac{2k+1}{3k}\Big)^{k/2}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k+(-1)^k}$$

5. Beräkna integralerna

$$\int_{|z|=1/2} \frac{1}{1+z^{10}}\,dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^{10}}\,dz, \quad \text{och} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{10}}\,dx.$$

6. a) Antag att $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, där potensserien har oändlig konvergensradie, uppfyller olikheten

$$|f(z)| \leq A + B|z|^N, \quad z \in \mathbb{C}$$

för några positiva konstanter A och B och något naturligt tal N. Visa att f måste vara ett polynom av grad högst N. (0.5)

b) Bestäm alla hela funktioner f som uppfyller olikheten

$$|f(z)| \leq |\cos z|$$

för alla $z \in \mathbb{C}$. (0.5)