LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2017–10–25 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = (-1)^n, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Skriv svaret på reell form. Beräkna särskilt x_{34}.

2. a) Bevisa att realdelen av en holomorf funktion måste vara harmonisk. (0.3)

b) Bestäm alla reella tal α sådana att funktionen $u(x, y) = x^\alpha y$ är realdelen av någon holomorf funktion g (med lämplig definitionsmängd). Hitta även alla sådana funktioner g. (Uttryck $g(z)$ i termer av $z = x + iy$.) (0.7)

3. a) Bestäm och klassificera (dvs. avgör typ av singularitet inklusive ordning av eventuella poler) alla isolerade singulariteter för funktionen

$$f(z) = \frac{\cos z}{(2z + \pi)^2(z^2 + 2z + 2)e^{2z+i}}. \tag{0.4}$$

b) Funktionen f ur a) har en Taylorserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - 1 + 2i)^k$. Vilken är den största (öppna) cirkelskiva på vilken serien konvergerar? (0.2)

c) Avgör konvergens eller divergens för serierna (0.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/k} \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}.$$

4. Beräkna följande integraler: (0.3+0.3+0.4)

$$\text{a)} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\cos z} \qquad \text{b)} \int_{|z|=4} \frac{e^z - \cos z}{z^3}\, dz \qquad \text{c)} \int_{|z|=3} \frac{dz}{\sin^2 z}$$

5. Funktionen f är 2π-periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi, \end{cases}$$

a) Förra gången som kursen gick beräknade sex olika studenter, låt oss kalla dem A, B, C, D, E respektive F, den trigonometriska Fourierserien $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}(t)$, för f. Tyvärr fick de sex olika svar, nämligen:

$$\begin{aligned}
&\text{A:} && \sum_{k=2}^{\infty} \frac{((-1)^k+1)k}{\pi(k^2-1)} \sin kt \\
&\text{B:} && \sum_{k=2}^{\infty} \frac{((-1)^k+1)k}{\pi(k^2-1)} \cos kt \\
&\text{C:} && \frac{1}{2}\cos t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{((-1)^k+1)k}{\pi(k^2-1)} \sin kt \\
&\text{D:} && \frac{1}{2}\cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\pi(4k^2-1)^2} \sin kt \\
&\text{E:} && \frac{1}{2}\sin t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{((-1)^k+1)k}{\pi(k^2-1)} \cos kt \\
&\text{F:} && \frac{1}{2}\sin t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\pi(4k^2-1)^2} \cos kt
\end{aligned}$$

En av dem hade faktiskt rätt. Vem? (Det går att lösa problemet utan att du själv behöver beräkna några integraler.) (0.3)

b) Visa att Fourierserien i a) konvergerar punktvis på hela $\mathbb{R}$. Rita en tydlig graf av Fourierseriens summa på (åtminstone) intervallet $-\pi \leq t \leq 3\pi$. Konvergerar serien likformigt på $-\pi \leq t \leq 3\pi$? (0.4)

c) Beräkna (t.ex. med hjälp av resultatet i a) summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}. \qquad (0.3)$$

6. a) Formulera Cauchys integralformel. Glöm inte att ange alla förutsättningar. (0.2)

b) Anta att f är holomorf på cirkelskivan $|z| < r$ för något $r > 1$ och dessutom uppfyller att $|f(z)| \leq M$ för alla z med $|z| = 1$. Visa att $|f(0)| \leq M$. (Detta är ett specialfall av den så kallade *maximumprincipen* för holomorfa funktioner.) (0.4)

c) Anta att f är holomorf på cirkelskivan $|z| < r$ för något $r > 1$ och uppfyller att $|f(e^{it})| \leq 2$ för $0 \leq t < \pi$ och $|f(e^{it})| \leq 8$ för $\pi \leq t < 2\pi$. Visa att $|f(0)| \leq 4$. (0.4)

(Om du misslyckas med c), kan du i stället visa den svagare olikheten: $|f(0)| \leq 5$, vilket i så fall belönas med 0.1p.)