LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2017–06–08 kl 8 – 13

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad.
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Bestäm alla poler (med ordning) till funktionen $f(z) = \dfrac{1}{\sin z - 2}$. (0.4)

b) Bestäm lösningen till rekursionsekvationen

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 4n - 3, \qquad a_0 = 0, a_1 = 1. \qquad (0.6)$$

2. a) Visa att $u(x, y) = 2x(1 - y)$ är realdelen av en holomorf funktion f med $f(i) = 0$. Beräkna dess imaginärdel och uttryck f som en funktion av $z = x + iy$. (0.6)

b) För vilka komplexa tal är funktionen $g(z) = z^2 - 2|z|^2 + \bar{z}^2$ deriverbar? (0.4)

3.a) Beräkna konvergensradien för serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^{2n} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-2)^n + \frac{1}{2^n}\right) z^n. \qquad (0.4)$$

b) Låt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ med $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+1}, x \in \mathbb{R}$. Är serien punktvis konvergent? Är funktionen $f(x)$ kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$? Är serien $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)$ punktvis konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$? (0.6)

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 + 4\cos t)^2}\, dt.$

5. Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^4 - 8n^2 + 1}$ med hjälp av den 2π-periodiska funktionen $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ för $x \in (-\pi, \pi)$.

6. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en 1-periodisk kontinuerlig funktion.

a) Motivera att f är en konstant funktion om och endast om fourierkoefficienterna $c_n = 0$ för alla $n \neq 0$. (0.3)

b) Visa att för ett godtyckligt irrationellt tal x är $e^{2\pi i n x} \neq 1$ för alla $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. (0.2)

c) Antag att den 1-periodiska funktionen f även är $\sqrt{2}$-periodisk, dvs. $f(x + \sqrt{2}) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Visa att f är en konstant funktion. (0.5)

Lycka till!